

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

im. Jarosława Dąbrowskiego

WYDZIAŁ CYBERNETYKI



ROZPRAWA DOKTORSKA

**KOMPUTEROWE WSPOMAGANIE MODELOWANIA
I OPTYMALIZACJI STRATEGII POSTĘPOWANIA
W WYBRANYCH PROBLEMACH, W TYM
NIEZAWODNOŚCIOWYCH, W SYSTEMACH
TRANSPORTOWYCH**

Autor:

por. mgr inż. Joanna Szkutnik-Rogoż

Promotor:

dr hab. inż. Tadeusz Nowicki, prof. WAT

Warszawa 2024

Spis treści

Streszczenie	5
Wykaz publikacji będących podstawą rozprawy doktorskiej	7
Oświadczenie o procentowym udziale współautorów w publikacjach będących podstawą rozprawy doktorskiej	9
Wprowadzenie	11
Rozdział 1. Przegląd literatury	17
Rozdział 2. Cel, teza i zakres pracy	29
Rozdział 3. Opis stosowanych metod i narzędzi badawczych	31
3.1. Programowanie liniowe	31
3.1.1. Modelowanie zagadnienia transportowego	31
3.1.2. Metoda kąta północno-zachodniego	34
3.1.3. Metoda minimalnego elementu w wierszu	34
3.1.4. Metoda minimalnego elementu w macierzy	35
3.1.5. Metoda VAM	35
3.1.6. Metoda KSAM	35
3.1.7. Metoda MDED	36
3.1.8. Metoda Blocha-Schmigalli	36
3.2. Badanie niezawodności obiektów technicznych	37
3.2.1. Model matematyczny obiektu technicznego nieodnawialnego	38
3.2.2. Model matematyczny obiektu technicznego odnawialnego	42
3.2.3. Metody rezerwowania w systemach	45
3.2.4. Metody całkowania numerycznego	47
3.3. Modelowanie decyzji inwestycyjnych	49
3.3.1. Decyzje przedsiębiorców	49
3.3.2. Metody wnioskowania statystycznego	50
3.3.3. Dominacje stochastyczne	53

Rozdział 4. Modelowanie i optymalizacja strategii postępowania w systemach transportowych	57
4.1. Metoda wyznaczania strategii postępowania z wykorzystaniem dominacji stochastycznych, zapewniająca maksymalizację zysku przez przedsiębiorców prowadzących działalność transportową	57
4.2. Metoda umożliwiająca określenie strategii postępowania prowadzącej do rozwiązania problemu transportowego z wykorzystaniem programowania liniowego oraz optymalizacji wielokryterialnej	64
4.3. Metoda ustalania strategii postępowania umożliwiającej optymalizację kosztów transportu w ramach sieci dostaw w oparciu o nowoczesne środowiska informatyczne	81
4.4. Metoda wyznaczania strategii postępowania umożliwiającej optymalizację organizacji procesu naprawy sprzętu wojskowego z wykorzystaniem metody Blocha-Schmigalli	86
4.5. Metoda umożliwiająca określenie strategii postępowania w celu wyznaczenia oczekiwanego czasu zdatności pojazdów z zastosowaniem metod całkowania numerycznego	94
4.6. Metoda określania strategii postępowania prowadzącej do wyznaczenia współczynnika gotowości technicznej pojazdów z wykorzystaniem transformaty Laplace'a oraz metod wnioskowania statystycznego	100
4.7. Metoda postępowania umożliwiająca maksymalizację zysku z redundancji przy jednoczesnym uwzględnieniu ograniczeń finansowych	114
4.8. Uniwersalna metodyka komputerowo wspomaganego postępowania zapewniająca optymalizację procesu decyzyjnego w systemach transportowych	127
Rozdział 5. Podsumowanie oraz kierunki dalszych badań	133
Bibliografia	135

Streszczenie

W rozprawie przedstawiono grupę modeli i metod z zakresu optymalizacji strategii postępowania wspierających procesy decyzyjne w obszarze transportu z uwzględnieniem niezawodności obiektów. Opis wyników składających się na dysertację podzielony jest na pięć rozdziałów. W rozdziale pierwszym dokonano przeglądu literatury w zakresie rozpatrywanej problematyki dotyczącej modelowania i optymalizacji strategii postępowania komputerowo wspomagających procesy decyzyjne w systemach transportowych. W rozdziale drugim przedstawiono wnioski wynikające z przeprowadzonego przeglądu literatury, które pozwoliły na sformułowanie celu, tezy oraz określenie zakresu niniejszej rozprawy doktorskiej. W rozdziale trzecim dokonano opisu stosowanych modeli, metod oraz technik badawczych. W rozdziale czwartym, dotyczącym modelowania matematycznego i optymalizacji strategii postępowania w systemach transportowych, przedstawiono oryginalne wyniki badań przeprowadzonych przez autorkę niniejszej rozprawy. Uzyskane wyniki potwierdziły, że opracowana metodyka postępowania umożliwia optymalizację wybranych fragmentów procesu decyzyjnego w systemach transportowych. Niniejsza dysertacja jest podsumowaniem cyklu publikacji naukowych i stanowi syntetyczny opis przeprowadzonych badań oraz uzyskanych wyników.

Wykaz publikacji będących podstawą rozprawy doktorskiej

W ramach rozprawy doktorskiej, będącej cyklem publikacyjnym, uwzględniono 6 artykułów opublikowanych w czasopismach naukowych o zasięgu międzynarodowym, posiadających tak zwany współczynnik Impact Factor, znajdujących się w wykazie czasopism naukowych i recenzowanych materiałów z konferencji Ministra Nauki z dnia 05 stycznia 2024 r. W cyklu stanowiącym rozprawę doktorską uwzględniono następujące publikacje:

[1] Żurek J., Ziółkowski J., **Szkutnik-Rogoż J.** (2019). *Stochastic dominance application for optimal transport company selection*, Conference: Computational Technologies in Engineering (TKI'2018): Proceedings of the 15th Conference on Computational Technologies in Engineering, p. 1–9, DOI: 10.1063/1.5092077

– udział własny: **80%**

[2] Żurek J., Małachowski J., Ziółkowski J., **Szkutnik-Rogoż J.** (2020). *Reliability Analysis of Technical Means of Transport*, Applied Sciences, 10(9), p. 1–17, DOI: 10.3390/app10093016

– liczba punktów według listy MEiN: **100**

– udział własny: **70%**

[3] Małachowski J., Ziółkowski J., **Szkutnik-Rogoż J.**, Lęgas A., Oszczypała M. (2020). *Application of the Bloch-Schmigalla Method to Optimize the Organization of the Process of Repairing Unmanned Ground Vehicles*, Advances in Science and Technology Research Journal, 14(3), p. 39–48, DOI: 10.12913/22998624/122605

– liczba punktów według listy MEiN: **100**

– udział własny: **78%**

[4] **Szkutnik-Rogoż J.**, Ziółkowski, J., Małachowski, J., Oszczypała, M. (2021). *Mathematical Programming and Solution Approaches for Transportation Optimisation in Supply Network*, Energies, 14(21), 7010, p. 1–32, DOI: 10.3390/en14217010

– liczba punktów według listy MEiN: **140**

– udział własny: **83%**

[5] **Szcutnik-Rogoż J.**, Małachowski, J., Ziółkowski, J. (2023). *An innovative computational algorithm for modelling technical readiness coefficient: A case study in automotive industry*, Computers & Industrial Engineering, 176(2023), 108942, p. 1–19, DOI: 10.1016/j.cie.2022.108942

– liczba punktów według listy MEiN: **140**

– udział własny: **88%**

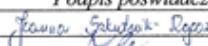


[6] **Szcutnik-Rogoż J.**, Małachowski, J. (2023). *Optimization programming tools supporting supply chain management*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, 71(3), e145570, p. 1–14, DOI: 10.24425/bpasts.2023.145570

– liczba punktów według listy MEiN: **100**

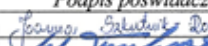



– udział własny: **85%**

Oświadczenie o procentowym udziale współautorów w publikacjach będących podstawą rozprawy doktorskiej

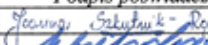




1. *Stochastic dominance application for optimal transport company selection*, COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES IN ENGINEERING (TKI'2018): Proceedings of the 15th Conference on Computational Technologies in Engineering; ISBN: 978-0-7354-1806-6

Imię i nazwisko współautora	Udział procentowy	Podpis poświadczający
Joanna Szkutnik-Rogoż	80	
Józef Żurek	10	
Jarosław Ziółkowski	10	





2. *Reliability Analysis of Technical Means of Transport*, Applied Sciences, 10(9), 2020, p. 1-17, DOI: 10.3390/app10093016

Imię i nazwisko współautora	Udział procentowy	Podpis poświadczający
Joanna Szkutnik-Rogoż	70	
Jerzy Małachowski	10	
Jarosław Ziółkowski	10	
Józef Żurek	10	




3. *Application of the Bloch-Schmigalla Method to Optimize the Organization of the Process of Repairing Unmanned Ground Vehicles*, Advances in Science and Technology Research Journal, 14(3), 2020, p. 39-48, DOI: 10.12913/22998624/122605

Imię i nazwisko współautora	Udział procentowy	Podpis poświadczający
Joanna Szkutnik-Rogoż	78	
Jerzy Małachowski	10	
Jarosław Ziółkowski	10	
Aleksandra Łęgas	1	
Mateusz Oszczypała	1	



4. *Mathematical Programming and Solution Approaches for Transportation Optimisation in Supply Network*, Energies, 14(21), 2021, 7010, DOI: 10.3390/en14217010

Imię i nazwisko współautora	Udział procentowy	Podpis poświadczający
Joanna Szkutnik-Rogoż	83	
Jerzy Małachowski	10	
Jarosław Ziółkowski	6	
Mateusz Oszczypała	1	

5. *An innovative computational algorithm for modelling technical readiness coefficient: A case study in automotive industry*, Computers & Industrial Engineering, 176(2023), 108942, p.1-19, DOI: 10.1016/j.cie.2022.108942

Imię i nazwisko współautora	Udział procentowy	Podpis poświadczający
Joanna Szkutnik-Rogoż	88	
Jerzy Małachowski	11	
Jarosław Ziółkowski	1	

6. *Optimization programming tools supporting supply chain management*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, 71(3), 2023, e145570, p.1-14, DOI: 10.24425/bpasts.2023.145570

Imię i nazwisko współautora	Udział procentowy	Podpis poświadczający
Joanna Szkutnik-Rogoż	85	
Jerzy Małachowski	15	

Wprowadzenie

Współczesne systemy logistyki rozwijają się w olbrzymim tempie, są coraz nowocześniejsze i charakteryzują się rozległą terytorialnie strukturą. Jednym z istotnych elementów tych systemów jest transport bazujący na flocie pojazdów zapewniających przewóz towarów i ludzi. Skala systemów logistyki, w tym również podsystemów transportowych, powoduje konieczność innego spojrzenia na sterowanie licznymi, wchodzącymi w ich skład procesami. Od dawna ugruntowana jest teza, że w coraz większym stopniu wymagają wspomagania decyzyjnego opartego na modelach, metodach i technikach informatyki. Te modele, metody i techniki powodują powstanie metodyk wspomagania komputerowego procesów decyzyjnych. Również w innych dziedzinach zauważalny jest w ostatnich latach wzrost zainteresowania metodami i środowiskami komputerowymi wspomagającymi podejmowanie decyzji.

Metodyki wspomagania komputerowego procesu decyzyjnego powstałe w celu rozwiązywania wybranych problemów decyzyjnych w obszarze transportu były motywacją do opracowania metodyki przedstawionej w ramach niniejszej rozprawy doktorskiej. W szczególności sposób potraktowano tu systemy transportowe w wojsku, ze względu na zawodowe doświadczenia autorki rozprawy.

Niniejsza dysertacja jest podsumowaniem cyklu publikacji naukowych. Pierwsza z publikacji odnosi się, do badań w zakresie modelowania zysku, jaki mogą osiągać przedsiębiorcy prowadzący działalność transportową. W kolejnej skupiono się na opracowaniu narzędzi informatycznych umożliwiających rozwiązanie klasycznego problemu transportowego z pewnymi modyfikacjami dotyczącymi uwzględniania warunków środowiskowych eksploatacji pojazdów transportowych. W dalszej kolejności przedstawiono sposób organizacji procesu naprawy na przykładzie bezzałogowych platform lądowych. W wyniku realizacji kolejnego etapu badań opracowano rozwiązanie wspomagane programem komputerowym prowadzące do wyznaczenia zarówno liczbowych, jak i funkcyjnych charakterystyk niezawodnościowych systemu transportowego. Zwieńczenie badań stanowi opracowanie strategii postępowania umożliwiającej zwiększenie gotowości systemu transportowego poprzez wprowadzenie redundancji.

Wydaje się, że powstał w ten sposób pewien logiczny ciąg rozumowania i postępowania przy organizacji dojrzałych metod komputerowego wspomaganie organizacji systemów transportowych. W rozprawie uwzględniono grupę modeli oraz metod z zakresu modelowania i optymalizacji strategii postępowania wspierających komputerowo procesy decyzyjne w systemach transportowych, ze szczególnym uwzględnieniem systemów wojskowych. Dość duży nacisk położono przy tym na uwzględnieniu własności niezawodnościowych systemów transportowych, co ma kapitalne znaczenie właśnie w organizacjach militarnych. Poza konstrukcją modeli matematycznych, formułowaniem zadań optymalizacji i wykorzystaniem metod ich rozwiązywania przedstawiono przykłady ich zastosowań ilustrując je obliczeniami numerycznymi w dużej mierze wziętymi z rzeczywistych systemów logistyki i transportu. Wszystkie obliczenia przeprowadzono na podstawie rzeczywistych danych liczbowych.

W opublikowanych artykułach przedstawiono bardzo skrócony opis wykorzystanych modeli, metod oraz technik badawczych. Wynikało to z ograniczonej możliwości umieszczenia tam szczegółowych informacji na ten temat. Stąd też u autorki pojawiła się myśl, aby w niniejszej dysertacji zamieścić dodatkowe rozdziały ilustrujące modele, metody oraz techniki badawcze, jakich używała prowadząc i publikując swoje badania. Może to być potraktowane jako pewien nadmiar w rozprawie, jednak uczyniono to świadomie i z rozmysłem. Czasem istotne są poza pewnymi formułami szeroko zakrojone intencje w badaniach naukowych i przedstawienie ich w szerszym kontekście badawczym.

Zawarte w rozprawie wyjaśnienia wraz z interpretacją autorki rozprawy mają na celu ułatwienie czytelnikowi poszukującemu metod wspomaganie decyzji w systemach transportowych zrozumienie nie tylko istoty podjętej tematyki, ale również modeli i technik tu użytych. W odniesieniu do publikacji uszczegółowiono tu również opis zaproponowanych procedur postępowania umożliwiających optymalizację wybranych fragmentów procesu decyzyjnego w obszarze transportu.

Skonstruowane modele matematyczne oraz zaproponowane informatyczne narzędzia wspomagające procesy decyzyjne umożliwiły rozwiązanie rozpatrywanego ciągu problemów. Ich wybór i sekwencja wydaje się autorce z jednej strony czytelna i chronologiczna w organizacji systemów transportowych, a z drugiej strony niepełna. Tak jest zawsze, jednak wszelkie metodyki mają te cechy, że są rozwijane. Oczywiście nie wyczerpują one całej tematyki dotyczącej modelowania i optymalizacji strategii postępowania w systemach transportowych, niemniej jednak mogą stanowić wsparcie w procesie decyzyjnym.

Chodziło tu również o to, aby przedstawić możliwości wykorzystania metod komputerowego wspomaganie decyzji w celu podejmowania optymalnych działań ze względu na przyjęte, istotne z praktycznego punktu widzenia kryteria ich oceny. Warto podkreślić, że zaproponowane środowisko komputerowego wspomaganie decyzyjnego może być z łatwością zaimplementowane i stosowane przez użytkowników nie znających technik programistycz-

nych oraz formuł otrzymanych w wyniku rozważań teoretycznych, gdyż wymaga wyłącznie prawidłowego wprowadzenia danych liczbowych dotyczących rozpatrywanych problemów.

Opis uzyskanych wyników rozprawy podzielony jest na pięć rozdziałów. Rozdział pierwszy stanowi przegląd literatury z zakresu rozpatrywanej problematyki dotyczącej modelowania i optymalizacji strategii postępowania wspierających komputerowo procesy decyzyjne w obszarze transportu z uwzględnieniem niezawodności obiektów. W rozdziale drugim przedstawione zostały wnioski wynikające z przeglądu literatury, które pozwoliły na sformułowanie celu, tezy oraz określenie zakresu niniejszej dysertacji. W rozdziale trzecim dokonano opisu stosowanych metod i narzędzi badawczych. Rozdział czwarty dotyczy modelowania matematycznego i optymalizacji strategii postępowania w systemach transportowych. Pierwszy etap badań obejmował modelowanie strategii postępowania z wykorzystaniem dominacji stochastycznych, zapewniającej maksymalizację zysku przez przedsiębiorców prowadzących działalność transportową. Teoria dominacji stochastycznych umożliwia w tym przypadku wyłonienie zbioru efektywnych inwestycji w odniesieniu do decydentów o różnych preferencjach. Model matematyczny zbudowano w oparciu o definicje związane z dominacjami stochastycznymi rzędu pierwszego oraz drugiego. Ponadto, opisano statystyczny aspekt wykorzystywania dominacji stochastycznych. Na podstawie danych liczbowych dotyczących zysku netto z tytułu prowadzonej działalności transportowej przez trzech przewoźników tj.: DHL (nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk założycieli: *ang.*: *Adrian Dalsey, Larry Hillblom, Robert Lynn*), DPD (*ang.* *Dynamic Parcel Distribution*) oraz GLS (*ang.* *General Logistic System*) skonstruowano model, w którym rozpatrywaną zmienną losową stanowiła stopa zwrotu z inwestycji. W celu weryfikacji hipotezy o normalności rozkładów stóp zwrotu zastosowano test Shapiro-Wilka. Integralną część modelu stanowi opracowany na potrzeby badań program komputerowy umożliwiający określenie rzędu dominacji stochastycznych występujących pomiędzy porównywanymi przewoźnikami. Ponadto, opracowany program komputerowy eliminuje konieczność przeprowadzenia złożonych obliczeń oraz umożliwia wizualizację wykresów wartości zysków i strat, a także posortowanych wartości stóp zwrotu indywidualnie dla każdego przewoźnika. Zaproponowana metoda modelowania, poprzez wykorzystanie dominacji stochastycznych, umożliwia porównanie decyzji inwestycyjnych oraz wskazanie strategii postępowania zapewniającej maksymalizację zysku przez przedsiębiorców prowadzących działalność transportową.

Drugi etap badań dotyczy modelowania strategii postępowania prowadzącej do rozwiązania problemu transportowego z wykorzystaniem programowania liniowego oraz optymalizacji wielokryterialnej. Jako cel badań przyjęto wyznaczenie optymalnego sposobu dystrybucji produktów w ramach założonej sieci dostaw przy zastosowaniu heurystycznych metod obliczeniowych, tj.: kąta północno-zachodniego, najmniejszego elementu w macierzy, najmniejszego elementu w wierszu oraz VAM (*ang.* *Vogel's Approximation Method*) prowa-

dzących do uzyskania minimalnej wartości funkcji celu rozumianej jako minimalny koszt transportu. W badaniach rozważono rzeczywistą sieć dystrybucji środków materiałowych dostarczanych na potrzeby wojska, których przewóz realizowano samochodami ogólnego przeznaczenia o średniej ładowności. W wyniku przeprowadzonych obliczeń stwierdzono, że wartości funkcji celu były zróżnicowane w zależności od zastosowanej metody, w związku z czym na potrzeby badań opracowano program komputerowy umożliwiający minimalizację wartości funkcji celu. W przypadku każdej z zastosowanych metod sprawdzono warunek konieczny dotyczący zdegenerowania wyznaczonego rozwiązania dopuszczalnego. Ponieważ transport, poprzez znaczący udział w emisji gazów cieplarnianych, ma negatywny wpływ na środowisko naturalne, to ważne i wręcz konieczne jest wdrażanie proekologicznej polityki transportowej. W związku z tym w badaniach wykorzystano również optymalizację wielokryterialną mającą na celu nie tylko minimalizację zużycia paliwa ale też emisji CO₂ w zależności od przebytej odległości. Implementacja zaproponowanego rozwiązania stanowi metodykę i środowisko programowe umożliwiające wyznaczenie optymalnego planu przewozowego dla indywidualnie przyjętych kryteriów.

Kontynuację wcześniejszych obliczeń i analiz stanowi trzeci etap badań polegający na opracowaniu narzędzi informatycznych w postaci kodów źródłowych programów komputerowych, zaimplementowanych w trzech różnych środowiskach obliczeniowych, umożliwiających modelowanie strategii postępowania mającej na celu minimalizację kosztów transportu. W wyniku przeprowadzonych obliczeń dokonano wizualizacji poszczególnych rozwiązań bazowych otrzymanych poprzez wykorzystanie metod: kąta północno-zachodniego, najmniejszego elementu w macierzy, VAM, KSAM (*ang. Karagul–Sahin Approximation Method*), MDDED (*ang. Maximum Difference Extreme Difference Method*). Rozwój technologii oraz wzrost zainteresowania nowoczesnymi matematycznymi metodami obliczeniowymi umożliwiającymi rozwiązywanie problemów transportowych mają istotny wpływ na racjonalną gospodarkę nowoczesną flotą środków transportowych w szczególności w systemach wojskowych. Zaproponowane narzędzia zapewniają nie tylko wyznaczenie rozwiązania optymalnego rozpatrywanego problemu, ale również umożliwiają porównanie złożoności obliczeniowej, rozumianej jako czas niezbędny do przeprowadzenia obliczeń, co może mieć kluczowe znaczenie w sytuacji, gdy czas na podjęcie decyzji jest ograniczony.

Etap czwarty dotyczy modelowania strategii postępowania umożliwiającej optymalizację organizacji procesu naprawy sprzętu wojskowego z wykorzystaniem metody Blocha-Schmigalli. Istotą metody Blocha-Schmigalli jest rozmieszczenie stanowisk naprawczych w siatce trójkątów równobocznych w taki sposób, aby stanowiska, pomiędzy którymi następuje największy przepływ danego materiału, zostały rozmieszczone jak najbliżej siebie. W celu optymalnego rozlokowania stanowisk naprawczych skonstruowano model matematyczny, w którym funkcję celu stanowi iloczyn wielkości przepływu uszkodzonego sprzętu wojskowego i odległo-

ści jego przemieszczania. W wyniku przeprowadzonych obliczeń wyznaczono optymalny sposób rozmieszczenia stanowisk naprawczych na przykładzie bezzałogowych platform lądowych. Zapewnia on takie zagospodarowanie przestrzeni, aby praca przebiegała w sposób ciągły, sprawny oraz aby stanowiska naprawcze charakteryzujące się największym powiązaniem technologicznym zostały zlokalizowane jak najbliżej siebie.

Piąty etap badań obejmuje modelowanie strategii postępowania prowadzącej do wyznaczenia oczekiwanego czasu zdatności pojazdów z wykorzystaniem metod całkowania numerycznego. Za cel badań przyjęto uściślenie definicji niezawodności w odniesieniu do technicznych środków transportu oraz zilustrowanie autorskiego rozwiązania prowadzącego do wyznaczenia oczekiwanego czasu zdatności pojazdów na przykładzie wybranej jednostki wojskowej. Podczas badań rejestrowano codzienny przebieg eksploatacyjny pojazdów oraz moment wystąpienia niesprawności. Omówiono podstawy teoretyczne konstrukcji modelu matematycznego oraz wyjaśniono potrzebę zastosowania metod całkowania numerycznego. Przeprowadzona analiza umożliwia wyznaczenie zarówno liczbowych, jak i funkcyjnych miar niezawodności. Na potrzeby badań opracowano rozwiązanie wspomagane programem komputerowym umożliwiającym wyznaczenie za pomocą metod całkowania numerycznego miary niezawodności stanowiącej oczekiwany czas zdatności. Implementacja zaproponowanego rozwiązania stanowi narzędzie umożliwiające wyznaczenie oczekiwanego czasu zdatności w zależności od przyjętej funkcji niezawodności.

W etapie szóstym za cel badań przyjęto opracowanie algorytmu umożliwiającego modelowanie strategii postępowania prowadzącej do wyznaczenia wartości współczynnika gotowości technicznej pojazdów z wykorzystaniem transformaty Laplace'a oraz metod wnioskowania statystycznego. W oparciu o przeprowadzoną analizę literatury przytoczono najważniejsze twierdzenia oraz definicje dotyczące teorii niezawodności, na podstawie których opracowano założenia i skonstruowano model matematyczny rzeczywistego procesu eksploatacji środków transportu. W wyniku przeprowadzonych obliczeń i analiz stwierdzono, że wyznaczona wartość współczynnika gotowości technicznej świadczy o prawidłowej organizacji procesu eksploatacji rozpatrywanych pojazdów. Zaproponowany algorytm eliminuje konieczność wykonywania złożonych obliczeń tradycyjnymi metodami oraz umożliwia łatwą wizualizację otrzymanych wyników. Ponadto, uniwersalność opracowanego algorytmu zapewnia możliwość wyznaczenia funkcyjnych i liczbowych miar niezawodności w odniesieniu do dowolnych obiektów technicznych.

Siódmy etap badań dotyczy możliwości zwiększenia gotowości systemu poprzez wprowadzenie redundancji, która zawsze powinna być racjonalnie zaplanowana. Nadmiarowość najczęściej jest przyczyną dodatkowych kosztów. W związku z tym, za cel badań przyjęto opracowanie strategii postępowania umożliwiającej maksymalizację zysku z redundancji przy jednoczesnym uwzględnieniu ograniczeń finansowych. Ponieważ zysk z redundancji jest

miarą ściśle związaną z wybranym wskaźnikiem niezawodności, to w przeprowadzonych badaniach wskaźnik ten stanowi współczynnik gotowości systemu. Obliczenia przeprowadzono na podstawie rzeczywistych danych liczbowych dotyczących eksploatacji pojazdów STAR 266. W skonstruowanym modelu matematycznym z niepomiąlnym czasem odnowy określono przestrzeń fazową obejmującą dziewięć stanów eksploatacyjnych. W wyniku obliczeń i analiz wyznaczono rozwiązanie zapewniające maksymalny zysk z redundancji w zależności od liczby pojazdów rezerwowanych oraz kosztów ich utrzymania. Zaproponowana metoda postępowania umożliwia również przeprowadzenie symulacji zysku z redundancji w zależności od kosztów utrzymania obiektów stanowiących rezerwę dla każdej z rozpatrywanych struktur niezawodnościowych.

Przedstawione wyniki badań są oryginalnymi wynikami autorki niniejszej rozprawy. Zakończenie dysertacji stanowi podsumowanie, w którym sformułowano wnioski oraz wskazano kierunki dalszych badań.

Rozdział 1

Przegląd literatury

W celu wspomagania procesu podejmowania decyzji coraz częściej wykorzystywane są badania operacyjne, które stanowią zbiór modeli i metod matematycznych umożliwiających wyznaczenie optymalnej decyzji. Jako prekursorów w zakresie badań operacyjnych można wskazać Thomasa Bayesa, którego twierdzenie dotyczące warunkowego prawdopodobieństwa zdarzeń stanowi podstawę wnioskowania statystycznego oraz Charlesa Babbage'a, konstruktora maszyny analitycznej mającej kluczowy wpływ na rozwój techniki komputerowej. Przyjmuje się, że pierwsze praktyczne zastosowanie wyników badań operacyjnych miało miejsce podczas II wojny światowej i dotyczyło rozwiązywania problemów związanych z logistyką i zaopatrzeniem wojsk w celu osiągnięcia maksymalnego sukcesu militarnego, przy możliwie małych stratach własnych [7]. Wielu naukowców zajmujących się rozwiązywaniem problemów decyzyjnych mających zastosowanie militarne, po zakończeniu II wojny światowej podejmowało pracę w przedsiębiorstwach cywilnych. Zauważono, że opracowane podczas wojny metody oraz schematy postępowania mogły być wykorzystywane do rozwiązywania rzeczywistych problemów w wielu innych dziedzinach życia. W rozwoju badań operacyjnych istotne znaczenie miało skonstruowanie pierwszych komputerów, dzięki którym możliwe było wykonywanie złożonych operacji obliczeniowych w relatywnie krótkim czasie. W ostatnich latach dostrzec można wzrost zainteresowania metodami mającymi na celu rozwiązywanie różnorodnych problemów oraz środowiskami komputerowymi wspomagającymi podejmowanie decyzji. W badaniach operacyjnych kluczową jest umiejętność konstruowania modeli matematycznych oraz wyboru odpowiedniej metody prowadzącej do wyznaczenia rozwiązania problemu opisanego modelem matematycznym. Jako narzędzia i środki wspomagające proces podejmowania decyzji najczęściej wykorzystywane jest oprogramowanie komputerowe oraz języki programowania. Oprogramowanie komputerowe zapewnia nie tylko prawidłowe działanie badanego systemu, ale również stanowi wsparcie w procesie podejmowania decyzji, dzięki możliwości porównywania różnych wariantów rozpatrywanych problemów. W przypadku zastosowania języków programowania podstawą do napisania efektywnego kodu programu komputerowego są formuły (w tym równania)

otrzymane w wyniku rozważań teoretycznych. Dlatego też, bardzo ważne jest ich dokładne zrozumienie i właściwe przełożenie na kod języka programowania.

Warto również podkreślić fakt, że wielu laureatów Nagrody Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii stanowili uczeni związani z badaniami operacyjnymi oraz podejmowaniem decyzji m.in.: Kenneth J. Arrow, John R. Hicks, Wassily Leontieff, Friedrich A. von Hayek, Gunnar Myrdal, Tjalling C. Koopmans, Leonid W. Kantorowicz, Milton Friedman, Herbert A. Simon, Harry M. Markowitz, John F. Nash, Reinhard Selten, John C. Harsanyi, Veron L. Smith, Daniel Kahneman, Edmund S. Phelps, Leonid Hurwicz, Roger B. Myerson i Eric S. Maskin [8].

Jednym z zagadnień, stanowiących przedmiot badań operacyjnych, jest zagadnienie transportowe polegające na wyznaczeniu optymalnego pod względem przyjętego kryterium planu przewozu dowolnego ładunku od ustalonych dostawców do określonych odbiorców. W literaturze dostępnych jest wiele opracowań prowadzących do optymalizacji zagadnienia transportowego w zależności od ustalonej funkcji celu, przy jednoczesnym uwzględnieniu występujących ograniczeń. Zastosowane rozwiązania mają na celu nie tylko określenie najlepszej metody rozwiązywania zagadnienia transportowego, ale również opracowanie algorytmu prowadzącego do zmniejszenia złożoności obliczeniowej poprzez skrócenie czasu niezbędnego do przeprowadzenia obliczeń. W artykule [9] sformalizowano jeden z pierwszych podstawowych problemów transportowych, który rozwinięto w [10]. Następnie, poprzez zastosowanie metody simpleks rozbudowano go w [11]. W literaturze wielokrotnie podejmowano tematykę związaną z efektywnością algorytmu transportowego [12, 13]. Problematykę wydajnych algorytmów dokładnych i heurystycznych, mających na celu rozwiązywanie problemu cen w sieci dwupoziomowej, w której popyt wyrażony jest poprzez nieliniową funkcję kosztów podróży rozpatrywano w artykule [14]. Metaheurystyczne podejście do rozwiązywania problemów transportowych z kosztami stałymi związanymi z trasami zostało zaprezentowane w pracy [15]. W sieciach dystrybucji racjonalne zarządzanie transportem wymaga wysiłku organizacyjnego związanego z dynamiką i rodzajem realizowanych zadań [16, 17, 18]. Zapewnienie wydajnych systemów dystrybucji usług stanowi wyzwanie dla firm logistycznych. Nowatorską metodę modelowania, mającą na celu minimalizację kosztów dostaw zaproponowano w publikacji [19]. Z kolei, w artykule [20] dokonano analizy liczby kroków niezbędnych do wyznaczenia rozwiązania optymalnego problemu transportowego przy użyciu metody kąta północno-zachodniego, najmniejszego elementu oraz metody VAM. Przedmiot badań stanowiły macierze kosztów transportu o wymiarach 5×5 , 10×10 , 20×20 , 40×40 , 80×80 , 160×160 oraz 320×320 , natomiast wartości podaży i popytu generowano w sposób losowy ze zbioru liczb od 5 do 50000. Na podstawie otrzymanych wyników stwierdzono, że liczba iteracji w celu uzyskania rozwiązania optymalnego w odniesieniu do metody kąta północno-zachodniego, w przypadku macie-

rzy o wymiarze 320×320 , była aż sześciokrotnie wyższa niż przy wykorzystaniu metody najmniejszego kosztu lub metody VAM. Innowacyjną metodę rozwiązywania zagadnienia transportowego opartą na metodzie kąta północno-zachodniego opisano w pracy [21]. Autorzy poprzez celowe zmodyfikowanie macierzy kosztów przed zastosowaniem metody kąta północno-zachodniego udowodnili, że zaproponowane rozwiązanie korzystnie wpływa na efektywność metody dzięki zmniejszeniu liczby przeprowadzonych iteracji. W celu wyznaczenia rozwiązania zagadnienia transportowego w artykule [22] opracowano nowatorską metodę KSAM (*ang. Karagul-Sahin Approximation Method*) wykorzystującą macierz ważonych kosztów transportu. Rozwiązanie otrzymane w oparciu o metodę KSAM było zgodne z rozwiązaniem wyznaczonym za pomocą metody VAM. W pracy [23] zastosowano metodę MOMC (*ang. Maximum Supply with Minimum Cost*), której wyniki porównano z trzema klasycznymi metodami tj. kąta północno-zachodniego, minimalnego kosztu oraz VAM. Zaletą wynikającą z zastosowania MOMC było nie tylko uzyskanie rozwiązania zapewniającego minimalizację funkcji celu, ale również osiągnięcie przewagi obliczeniowej w postaci szybszego przetwarzania danych i mniejszego zużycia pamięci. W artykule [24] analizie poddano metodę VAM oraz zaproponowano jej ulepszenie przez zastosowanie macierzy całkowitego kosztu alternatywnego (*ang. Total Opportunity Cost Matrix*) oraz alternatywnych kosztów alokacji (*ang. Alternative Allocation Costs*). W obliczeniach zastosowano zarówno parametryczne, jak i nieparametryczne testy statystyczne dostępne w pakiecie statystycznym MINITAB-15. W publikacji [25] omówiono ograniczenia wynikające z zastosowania metody VAM oraz opracowano ulepszony algorytm LD-VAM (*ang. Logical Development of Vogel's Approximation Method*) zapewniający niższą wartość funkcji celu, niż w metodzie VAM. W pracy [26] zaproponowano metodę ATM (*ang. Allocation Table Method*) prowadzącą do wyznaczenia bazowego rozwiązania dopuszczalnego o niższym koszcie transportu niż w rozwiązaniach uzyskanych tradycyjnymi algorytmami. W pracy [27] zastosowano nową heurystyczną metodę nazywaną TOC (*ang. Total Opportunity-Cost Method*) w celu wyznaczenia bazowego rozwiązania dopuszczalnego zagadnienia transportowego, zaś otrzymane wyniki porównano z klasyczną metodą VAM.

W literaturze często podejmowana jest problematyka mająca na celu opracowanie najefektywniejszej metody rozwiązywania zagadnienia transportowego według różnych kryteriów, np. czasu lub kosztów, przy jednoczesnym wykorzystaniu dostępnych narzędzi informatycznych [28, 29]. W publikacji [30] analizie poddano kilka wariantów metody VAM uwzględniających koncepcję całkowitego kosztu alternatywnego. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń, przy użyciu języka programowania Turbo C++ stwierdzono, że klasyczna metoda VAM połączona z całkowitym kosztem alternatywnym tzw. VAM-TOC w rezultacie zapewnia rozwiązanie optymalne lub bliskie optymalnemu. Propozycję zastosowania języka C++ opisano również w [31]. Przy wykorzystaniu metody JHM (*ang. Juman & Hoque*

Method) rozwiązano 18 problemów transportowych, z których 11 zaczerpnięto z literatury, natomiast 7 wygenerowano losowo. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że metoda JHM w aż 16 rozpatrywanych problemach doprowadziła w efekcie do wyznaczenia minimalnego kosztu transportu. W pracy [32] rozwiązano problem transportowy metodą kąta północno-zachodniego, minimalnego kosztu, najmniejszego elementu w wierszu, najmniejszego elementu w macierzy, VAM oraz przy użyciu programowania obiektowego. Ze względu na konieczność wykonania wielu iteracji prowadzących do rozwiązania rozpatrywanego problemu, w celu zmniejszenia złożoności obliczeniowej, również zastosowano język programowania C++.

Problematyka związana z rozwiązywaniem zagadnienia transportowego za pomocą oprogramowania Matlab stanowi przedmiot zainteresowania w wielu publikacjach. W pracy [33] analizie poddano problem przewozu substancji chemicznych dla przedsiębiorstwa farmaceutycznego przy wykorzystaniu metody kąta północno-zachodniego. W celu wyznaczenia bazowego rozwiązania dopuszczalnego problemu transportowego za pomocą aproksymacji VAM i MODI (*ang. Modified Distribution Method*), w artykule [34] również zastosowano oprogramowanie Matlab. W publikacji [35] udowodniono zasadność wykorzystywania pakietu Matlab nie tylko ze względu na wysoką efektywność zastosowanego algorytmu, ale również z uwagi na skrócenie czasu niezbędnego do przeprowadzenia obliczeń. Ponadto, implementacja zaproponowanej procedury umożliwiła rozwiązanie problemu komiwojażera. Opis algorytmów bazujących na metodzie kąta północno-zachodniego, najmniejszego elementu, VAM oraz MODI zamieszczono w pracy [36]. W zaproponowanym podejściu podkreślono wyższość skuteczności metod heurystycznych realizowanych przez oprogramowanie komputerowe nad implementowanymi algorytmami klasycznymi.

W badaniach naukowych wiele uwagi poświęca się minimalizacji kosztów transportu przy ściśle ustalonych wielkościach podaży i popytu. Należy jednak pamiętać, że w trakcie realizacji procesu transportowego wartości zarówno podaży, jak i popytu, mogą ulec zmianie. W pracy [37] zdefiniowano model uwzględniający koszty zapasów w celu określenia dolnej i górnej granicy całkowitych kosztów transportu w sytuacji zmiany podaży i popytu. Znaczenie wpływu zmienności popytu w celu minimalizacji kosztów łańcucha dostaw omówiono w [38]. W badaniach skupiono uwagę na optymalizacji prędkości pojazdu nie tylko w celu zmniejszenia kosztów transportu, ale również w celu ograniczenia emisji dwutlenku węgla, przy jednoczesnym uwzględnieniu zmienności popytu. Jako kierunek dalszych badań wskazano możliwość wykorzystania złożonego procesu Poissona w celu ograniczenia ryzyka w łańcuchu dostaw. Racjonalne planowanie transportu w sieci dostaw często wymaga rozwiązania problemów związanych nie tylko z kosztami transportu, ale również z wyborem tras dostaw, czy też emisją gazów cieplarnianych [39, 40]. W artykule [41] dokonano oceny zużycia energii oraz emisji spalin przez pojazdy hybrydowe, elektryczne oraz z napędem

konwencjonalnym. Podobną tematykę podjęto w pracy [42], w której wyjaśniono korzyści wynikające z racjonalnego dostosowania prędkości pojazdów nie tylko pod względem finansowym, ale również ekologicznym poprzez zmniejszenie emisji dwutlenku węgla.

W literaturze często podejmowana jest tematyka związana z modelowaniem systemów eksploatacji środków transportu. Wykorzystanie odpowiednich metod matematycznych, w celu sterowania procesem eksploatacji, umożliwia podejmowanie racjonalnych decyzji przy jednoczesnym zapewnieniu prawidłowej realizacji przydzielonych zadań. Jedną z miar opisujących funkcjonowanie systemu eksploatacji środków transportu jest jego gotowość do realizacji określonych zadań przewozowych. Metody modelowania procesów eksploatacji obiektów technicznych stanowią przedmiot zainteresowania m.in. teorii niezawodności, badań operacyjnych, teorii podejmowania decyzji, modelowania symulacyjnego, teorii odnowy lub metod analizy statystycznej.

Praktyczne wykorzystanie teorii niezawodności rozpatrywano w artykule [43]. Korzystając z teorii Dempstera-Shafera oraz dynamicznej sieci Bayesa opracowano model umożliwiający ocenę niezawodności w złożonych systemach. Metodę optymalizacji działania systemów rezerwy cieplej w oparciu o teorię wieku wirtualnego zaproponowano w pracy [44]. Iteracyjną metodę obliczania optymalnych schematów niezawodności opisano w publikacji [45]. W badaniach uwzględniono możliwość obniżenia kosztów, skrócenia czasu niezbędnego do przeprowadzenia testów oraz zmniejszenie wielkości próbki. W artykule [46] zbadano dwupoziomowy łańcuch dostaw, w którym sprzedawca detaliczny na niższym szczeblu dzielił się informacjami z producentem na wyższym szczeblu łańcucha dostaw. Na podstawie wyników przeprowadzonych badań stwierdzono, że zwiększenie dostępności i niezawodności mechanizmu transmisji informacji zapewniło wzrost zysku producenta. Metodę optymalizacji konserwacji części zamiennych dla systemu szeregowo-równoległego z dwoma trybami awarii opisano w [47]. Korzystając z procesu semi-Markowa opracowano model symulacyjny umożliwiający minimalizację średniego kosztu przypadającego na jednostkę czasu. Model średniego czasu życia, który można zastosować do spójnych systemów z jednoczesnym uwzględnieniem zarówno zmian w środowisku operacyjnym, jak i zachodzących procesów starzenia się systemu, zaproponowano w [48]. Celem artykułu była minimalizacja długookresowego średniego kosztu utrzymania w jednostce czasu poprzez określenie odpowiednich częstotliwości przeglądów i optymalnej polityki wymiany. W oparciu o zagregowane procesy stochastyczne i procesy semi-Markowa w publikacji [49] zaproponowano mechanizm równoważenia obciążenia dla systemu złożonego z dwóch podsystemów. Wyniki przeprowadzonych badań mogą mieć praktyczne zastosowanie nie tylko w analizie niezawodności systemów, ale również w zarządzaniu łańcuchem dostaw. Model niezawodności łańcucha dostaw na przykładzie branży farmaceutycznej rozpatrywano w artykule [50]. W modelu uwzględniono wskaźniki obejmujące oczekiwane niedobory leków na rynku farmaceutycz-

nym, średni czas do wystąpienia niedoboru oraz średni czas powrotu do zdrowia. Algorytm umożliwiający wyznaczenie funkcji niezawodności, który można zastosować w badaniach stacjonarnych i niestacjonarnych charakterystyk niezawodnościowych zaproponowano w [51]. Algorytm przeznaczony do oceny niezawodności modelu sieci opartego na ścieżkach ruchu opisano w artykule [52]. W oparciu o przeprowadzone przykłady numeryczne udowodniono, że proponowany algorytm zapewnił większą prędkość przy mniejszej liczbie błędów aproksymacji i może być wdrożony w przypadku innych miar niezawodności, takich jak częstotliwość awarii, średni czas między awariami oraz średni czas naprawy. W publikacji [53], zaproponowano jednostronny adaptacyjny wykres kontrolny w celu monitorowania czasu między zdarzeniami.

W analizie niezawodności bardzo istotne znaczenie ma zastosowanie transformaty Laplace'a. Niezawodność systemu złożonego z trzech podsystemów połączonych szeregowo opisano w artykule [54]. Korzystając z metody zmiennych dodatkowych oraz transformaty Laplace'a obliczono wybrane miary niezawodności m.in. średni czas do awarii. Wyniki badań mających na celu wyznaczenie głównych charakterystyk niezawodnościowych systemu, w których prawdopodobieństwo przebywania w poszczególnych stanach obliczono w oparciu o transformatę Laplace'a, zaprezentowano w [55]. W celu wyznaczenia jawnej postaci funkcji niezawodności oraz średniego czasu do awarii systemu w artykule [56] również wykorzystano transformatę Laplace'a. Teorię naprzemiennych procesów odnowy, wykorzystującą transformatę Laplace'a do badania funkcji relaksacji, opisano w publikacji [57].

Rozwiązywanie problemów decyzyjnych dotyczących oceny działania złożonych systemów eksploatacji różnych obiektów technicznych za pomocą metod analitycznych często jest utrudnione lub niemożliwe do zrealizowania. W związku z tym, w celu rozwiązywania tego typu problemów coraz częściej wykorzystywane są techniki symulacyjne. Podstawą budowy modeli symulacyjnych jest wyznaczenie, w oparciu o dane eksploatacyjne, rozkładów prawdopodobieństwa rozpatrywanych zmiennych losowych, opisujących badany system lub proces. Wyniki przeprowadzonych badań symulacyjnych często stanowią podstawę podejmowania racjonalnych decyzji dotyczących sterowania procesem eksploatacji [58]. Nowatorską procedurę podejmowania optymalnych decyzji, dotyczących zarządzania procesem oceny i naprawy uszkodzeń bojowych, zaproponowano w [59]. Opracowany model symulacyjny poprzez klasyfikowanie uszkodzonego sprzętu na grupę awaryjną i nieawaryjną, może stanowić narzędzie wspomagające podejmowanie decyzji w zakresie zarządzania procesem logistyki wojskowej. W artykule [60] przeprowadzono analizę wrażliwości opartą na symulacji, mającą na celu ocenę głównych przyczyn zawodności usług autobusowych. Opartą na symulacji metodę modelowania odporności systemów zbiorowego transportu kolejowego, w której wskaźniki wydajności systemu stanowiły opóźnienia oraz liczba pasażerów, omówiono w pracy [61].

Problematykę związaną z modelowaniem gotowości w systemach transportowych opisano w [62]. Metodę modelowania opartą na teorii niepewności wraz z analizą stabilności i oceną niezawodności niepewnych sieci transportowych przedstawiono w artykule [63]. Zaproponowana metoda może być wykorzystana do rozwiązywania złożonych problemów decyzyjnych w zakresie wyszukiwania tras i projektowania sieci transportowych. W celu oceny niezawodności systemu transportu kolejowego, w [64] zaproponowano innowacyjny algorytm oparty na minimalnych ścieżkach transportowych. W przeprowadzonych badaniach niezawodność systemu zdefiniowano jako prawdopodobieństwo przemieszczenia się pasażerów ze stacji początkowej do stacji docelowej zgodnie z planem podróży. W artykule [65] dokonano przeglądu oraz porównania definicji i wskaźników ilościowych trzech pojęć związanych z funkcjonowaniem sieci transportowej w warunkach zakłóceń, tj. niezawodności, podatności na zagrożenia i odporności. Adaptacyjny sterownik sygnału do zarządzania niezawodnością usług autobusów miejskich z acyklicznymi planami synchronizacji zaproponowano w [66]. Opracowany sterownik może być wykorzystany do zmniejszenia zmienności usług autobusowych w zależności od wymagań stochastycznych. W artykule [67] dokonano przeglądu literatury dotyczącej odporności transportu, ze szczególnym uwzględnieniem definicji oraz metod badawczych stosowanych w różnych systemach transportowych. W celu modelowania zdarzeń, będących przyczyną opóźnień w dostawach w transporcie drogowym, często wykorzystywana jest teoria wartości ekstremalnych, której praktyczne zastosowanie opisano w publikacji [68]. W celu monitorowania niezawodności autobusów w czasie rzeczywistym, w artykule [69] wykorzystano dane dotyczące lokalizacji pojazdów. W wyniku przeprowadzonych analiz i obliczeń oceniono częstotliwość opóźnień w dostawach oraz określono sposób planowania dodatkowych zasobów, zarówno pojazdów, jak i kierowców, w celu zagwarantowania terminowości realizacji dostaw. W pracy [70] zaproponowano model matematyczny opisujący proces eksploatacji autobusu. Skonstruowany model został zweryfikowany w wyniku przeprowadzonych testów numerycznych.

W celu modelowania strategii postępowania w systemach transportowych często wykorzystywane są modele Markowa i semi-Markowa. W artykule [71] analizie poddano problem konwojowania pojazdów w węzłach autostradowych. W celu minimalizacji skumulowanych kosztów podróży w nieskończonym horyzoncie czasowym zaproponowano metodę modelowania opartą na procesie Markowa. Ponadto, opracowano algorytm umożliwiający wyznaczenie optymalnej strategii postępowania. W celu ustalenia wzorców tankowania pojazdów napędzanych wodorem oraz zachowań kierowców, w artykule [72] skonstruowano model stochastyczny oparty na łańcuchu Markowa, w którym uwzględniono czas tankowania, czas spędzony na stacjach tankowania oraz pojemność baku. Dokładność wzorców tankowania sprawdzono przez weryfikację modelu z rzeczywistymi danymi dotyczącymi pojazdów zasilanych wodorem. Przeprowadzona analiza wrażliwości potwierdziła zasadność implemen-

tacji opracowanego rozwiązania do ilościowego określenia wpływu badanych parametrów na wzorce tankowania. Metodę modelowania procesu eksploatacji pojazdów, w aspekcie ich gotowości na przykładzie pojazdów wojskowych, opisano w publikacji [73]. W badaniach skonstruowano pięciostanowy model procesu eksploatacji oparty na procesach Markowa. Następnie wyznaczono graniczne prawdopodobieństwo przebywania obiektów w poszczególnych stanach eksploatacyjnych. Dwa nowe wskaźniki niezawodności tj. dostępność pokrycia wielopunktowego oraz dostępność pokrycia wieloprzedziałowego dla zagregowanych systemów semi-Markowa pierwszego i drugiego rzędu w czasie dyskretnym zaproponowano w [74]. Przestrzeń stanów podzielono na podzbiory odpowiadające przebywaniu w stanach funkcjonowania: doskonałego, niedoskonałego i awarii. Jako kierunek dalszych badań wskazano wyznaczenie wskaźników niezawodności dla różnych typów układów semi-Markowa wyższego rzędu.

Zapewnienie wymaganego poziomu gotowości systemu eksploatacji środków transportu jest możliwe dzięki właściwie dobranej strategii sterowania procesem, wynikającej z podejmowania decyzji optymalnych ze względu na przyjęte kryteria oceny. W pracy [75] rozpatrywano problem polegający na wyznaczeniu rozkładu jazdy pociągów z uwzględnieniem minimalizacji planowego czasu przejazdu oraz opóźnień pasażerskich i towarowych. W celu zwiększenia niezawodności rozkładu jazdy pociągów opracowano metodę modelowania łączącą symulację i optymalizację rozkładu jazdy. Model oceny jakości usług o trzystopniowej strukturze hierarchicznej do oceny systemów transportu publicznego w czasie pandemii zaproponowano w [76]. Opracowana metodyka może zostać wdrożona przez organizacje publiczne lub prywatne w celu ulepszenia swoich strategii i działań, gdyż uwzględnia dowolność wyboru środków transportu oraz zróżnicowanie rodzajów transportu. W celu badania wpływu niezawodności czasu podróży na wybór środka transportu, w artykule [77] zastosowano skumulowaną teorię perspektywy. Na podstawie przeprowadzonego badania ankietowego i danych empirycznych dotyczących czasu podróży skonstruowano model matematyczny wspomagający proces podejmowania decyzji w warunkach niepewności. Wybrane wskaźniki niezawodności usług autobusowych obejmujące postrzeganie niezawodności zarówno przez pasażerów, jak i operatorów, zaproponowano w artykule [78]. W wyniku przeprowadzonych badań opracowano model symulacyjny umożliwiający zwiększenie niezawodności usług autobusowych.

Metody badań operacyjnych znajdują również zastosowanie w procesie podejmowania decyzji związanych z zarządzaniem przedsiębiorstwem. Działalność każdej firmy wiąże się z podejmowaniem różnorodnych decyzji. Szczególnie ważne są decyzje determinujące funkcjonowanie przedsiębiorstwa, do których zaliczyć można m.in. decyzje inwestycyjne. Inwestorzy najczęściej rozpatrują potencjalne inwestycje w kontekście ryzyka oraz oczekiwanego zwrotu z zainwestowanego kapitału. W literaturze, jako narzędzie wspomagające

proces podejmowania decyzji, często wykorzystywane są dominacje stochastyczne. Dominację stochastyczną rzędu pierwszego FSD (*ang. First Stochastic Dominance*) po raz pierwszy opisano w 1962 r. w pracy [79]. Dominację stochastyczną rzędu drugiego SSD (*ang. Second Stochastic Dominance*) zdefiniowano w 1969 r. w [80], natomiast dominację stochastyczną rzędu trzeciego TSD (*ang. Third Stochastic Dominance*) opisano w 1970 r. w [81]. Przykład zastosowania dominacji stochastycznych w celu opisu reguł sterujących rynkiem finansowym omówiono w [82, 83]. W publikacji [84] zaproponowano metody modelowania wykorzystujące dominacje stochastyczne w celu określenia rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych stanowiących dochód. Wyniki badań dotyczących efektywności decyzji finansowych na podstawie stóp zwrotu z inwestycji amerykańskich, brytyjskich oraz japońskich spółek giełdowych opisano w publikacji [85]. W badaniach dokonano porównania średnich stóp zwrotu przy wykorzystaniu analizy regresji. Korzystając z dominacji stochastycznych oraz testów Kołmogorowa-Smirnowa, w artykule [86] dokonano porównania poziomu produktywności na przykładzie hiszpańskich firm produkcyjnych prowadzących działalność nie tylko na rynku krajowym, ale również międzynarodowym. Przeprowadzone obliczenia potwierdziły niższy poziom produktywności firm, które nie eksportowały swoich towarów w stosunku do firm, których działalność obejmowała rynek międzynarodowy. Tematykę dotyczącą zastosowania dominacji stochastycznych oraz testów Kołmogorowa-Smirnowa rozpatrywano również w [87]. Badania umożliwiły określenie rzędów dominacji stochastycznych występujących pomiędzy zmiennymi losowymi stanowiącymi dochody na przykładzie pewnego problemu występującego na rynku finansowym w Kanadzie. Wspomaganie procesu podejmowania decyzji finansowych przy wykorzystaniu dominacji stochastycznych rozpatrywano również w artykule [88]. Zaproponowany stochastyczny algorytm optymalizacji umożliwił porównanie różnych strategii dywersyfikacji portfela inwestycyjnego oraz wyznaczenie inwestycji zapewniającej maksymalną stopę zwrotu w oparciu o dane liczbowe dotyczące międzynarodowych indeksów giełdowych. Problematykę związaną z preferencjami amerykańskich inwestorów, w zakresie dywersyfikacji portfela inwestycyjnego, rozpatrywano również w publikacji [89]. W wyniku przeprowadzonych badań stwierdzono, że dla inwestorów skłonnych do zaakceptowania wyższego poziomu ryzyka korzystniejsza jest krajowa strategia dywersyfikacji, natomiast w przypadku inwestorów wykazujących awersję do ryzyka, wyższy zysk możliwy jest dzięki przyjęciu międzynarodowej strategii dywersyfikacji. Wyniki badań, opisane w pracy [90], również potwierdzają to, że międzynarodowa strategia dywersyfikacji jest dla inwestorów korzystniejsza niż strategia obejmująca wyłącznie rynek krajowy. Korzystając z dominacji stochastycznych, w [91], zaproponowano metodę modelowania preferencji inwestorów zarówno unikających ryzyka, jak i skłonnych do jego podjęcia. Metodę postępowania umożliwiającą maksymalizację zysku z inwestycji, przy założeniu, że stopa zwrotu portfela stochastycznie dominuje nad referencyjną stopą zwrotu, opisano

w [92]. W obliczeniach zastosowano cztery referencyjne stopy zwrotu oraz określono pewne funkcje użyteczności. Koncepcję wykorzystania dominacji stochastycznej rzędu drugiego oraz nieliniowych funkcji użyteczności, w celu optymalizacji portfela inwestycyjnego, przedstawiono w [93]. Metodę szacowania kosztu kapitału przy wykorzystaniu dominacji stochastycznej rzędu pierwszego rozpatrywano w publikacji [94]. W badaniach wykazano, że wraz ze wzrostem horyzontu inwestycyjnego zwiększa się asymetria rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych stanowiących stopy zwrotu z inwestycji. Zaproponowana metodyka może stanowić wsparcie przy podejmowaniu decyzji, zwłaszcza dla inwestorów z awersją do ryzyka. W artykule [95] dokonano analizy anomalii kalendarzowych występujących na rynku kapitałowym i umożliwiających inwestorom uzyskanie nietypowych zysków z inwestycji. Na podstawie danych zaczerpniętych z indonezyjskiej giełdy papierów wartościowych, korzystając z dominacji stochastycznych, sprawdzono występowanie efektów dziennych, tygodniowych oraz tzw. efektu stycznia. W wyniku przeprowadzonej analizy nie stwierdzono występowania efektu stycznia, natomiast zaobserwowano to, że zyski z inwestycji zrealizowanych we wtorki są zazwyczaj wyższe niż w pozostałe dni tygodnia. W zakresie występowania efektów tygodniowych najwyższe zyski notowano w drugim i czwartym tygodniu rozpatrywanych miesięcy. Dane liczbowe zaczerpnięte z indonezyjskiej giełdy papierów wartościowych stanowiły również podstawę badań, których wyniki opisano w [96]. Celem badań było skonstruowanie modelu opartego na dominacji stochastycznej rzędu pierwszego, umożliwiającego wyznaczenie zysku inwestorów przy założeniu, że zmienne losowe oznaczające stopy zwrotu są zgodne z rozkładem logarytmiczno-normalnym. Modelowanie zysku z inwestycji dla zmiennych określonych rozkładem logarytmiczno-normalnym było również przedmiotem zainteresowania autorów, których rezultaty przeprowadzonych analiz opublikowano w artykule [97]. Na podstawie dominacji stochastycznej rzędu pierwszego oraz drugiego wyznaczono trzy spółki generujące najwyższe zyski. W pracy [98] zastosowano kryteria dominacji stochastycznej w celu skonstruowania modelu wyceny aktywów kapitałowych dla inwestorów o rosnących funkcjach użyteczności. W wyniku przeprowadzonej analizy stwierdzono, że jeżeli ceny akcji podlegają ruchom Browna, to wówczas rozkłady prawdopodobieństwa stóp zwrotu są zgodne z rozkładem logarytmiczno-normalnym. W [99], opracowano metodę modelowania umożliwiającą uzyskanie kompromisu pomiędzy oczekiwanym zwrotem z inwestycji i oczekiwaną stratą. W badaniach wykorzystano dominację stochastyczną rzędu pierwszego. Problematykę związaną z efektywnością rynków akcji, mającą kluczowe znaczenie dla alokacji kapitału oraz rozwoju gospodarczego, rozpatrywano w publikacji [100]. Przeprowadzona analiza azjatyckich, europejskich oraz amerykańskich indeksów giełdowych, oparta na kryterium dominacji stochastycznej pierwszego, drugiego oraz trzeciego rzędu, umożliwiła wyznaczenie zbioru efektywnych inwestycji. Praktyczne wykorzystanie dominacji stochastycznej rzędu trzeciego, w celu wyznaczenia strategii postę-

powania zapewniającej maksymalny zwrot z inwestycji, przedstawiono w [101]. W wyniku przeprowadzonych badań stwierdzono, że strategie charakteryzujące się mniejszymi stopami zwrotu, mniejszym ryzykiem oraz większą dodatnią skośnością były korzystniejsze niż strategie „kup i trzymaj”. Metodę postępowania prowadzącą do wyznaczenia optymalnego wariantu inwestycji z wykorzystaniem metody Monte Carlo oraz dominacji stochastycznych rzędu pierwszego i drugiego zaproponowano w artykule [102]. Jako kryterium decyzyjne, umożliwiające ustalenie opłacalności wariantów inwestycji, zastosowano regułę wartości średniej oraz współczynnika zmienności, natomiast w celu porównania poszczególnych wariantów wykorzystano dominację stochastyczną. Zastosowanie dominacji stochastycznej w celu maksymalizacji zysku z inwestycji stanowiło przedmiot zainteresowania autorów, których wyniki badań opublikowano w pracy [103]. W celu zweryfikowania hipotezy o normalności rozkładu stóp zwrotu z inwestycji zastosowano test Jarque-Bera. Przeprowadzona analiza umożliwiła wyłonienie 3 kombinacji inwestycji dominujących pod względem dominacji stochastycznej rzędu pierwszego oraz 26 kombinacji inwestycji dominujących pod względem dominacji stochastycznej rzędu drugiego. Podobną tematykę badań rozpatrywano w [104]. Autorzy również wykorzystali kryterium dominacji stochastycznej pierwszego i drugiego rzędu oraz test Jarque-Bera. W badaniach zastosowano ucięty rozkład normalny, dzięki czemu wyznaczono 17 kombinacji inwestycji korzystnych z punktu widzenia dominacji stochastycznej rzędu pierwszego oraz 14 kombinacji inwestycji korzystnych z punktu widzenia dominacji stochastycznej rzędu drugiego.

Rozdział 2

Cel, teza i zakres pracy

Przeprowadzony przegląd literatury uwidocznił brak opracowanej uniwersalnej i kompleksowej metody modelowania i optymalizacji strategii postępowania wspierających procesy decyzyjne w obszarze transportu z uwzględnieniem niezawodności obiektów. Ponadto, w wielu dotychczas opracowanych modelach niezawodnościowych, często nie są uwzględnione założenia dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa rozpatrywanych zmiennych losowych, mające fundamentalny wpływ na wybór odpowiedniej metody postępowania. Należy również podkreślić, że korzystanie z modeli matematycznych, bez znajomości oraz weryfikacji ich założeń, jest przyczyną nieprawidłowej interpretacji wyników, a w konsekwencji wyciągania błędnych wniosków. Mając to na uwadze za cel pracy przyjęto: opracowanie metody modelowania i optymalizacji strategii postępowania wspierających procesy decyzyjne w obszarze transportu z uwzględnieniem niezawodności obiektów. W niniejszej dysertacji sformułowano następującą tezę:

Istnieje możliwość opracowania metodyki i środowisk obliczeniowych komputerowego wspomagania postępowania zapewniających optymalizację elementów procesu decyzyjnego w systemach transportowych.

W celu weryfikacji postawionej tezy określono następujące zadania badawcze:

- pozyskanie, weryfikacja, analiza oraz przygotowanie danych empirycznych,
- opracowanie bazy danych zawierającej pozyskane informacje i usprawniającej procesy obliczeniowe,
- ocena reprezentatywności statystycznej danych empirycznych,
- skonstruowanie modeli matematycznych umożliwiających optymalizację procesu decyzyjnego w systemach transportowych,
- opracowanie algorytmu postępowania, bazującego na kryteriach dominacji stochastycznych, umożliwiającego maksymalizację zysku przez przedsiębiorców prowadzących działalność transportową,
- opracowanie algorytmu postępowania umożliwiającego optymalizację sposobu dystrybucji produktów w ramach założonej sieci dostaw,

-
- opracowanie bazującego na metodzie Blocha-Schmigalli algorytmu postępowania zapewniającego optymalizację organizacji procesu naprawy sprzętu wojskowego,
 - opracowanie algorytmu postępowania wykorzystującego metody całkowania numerycznego, prowadzącego do wyznaczenia oczekiwanego czasu zdatności grupy pojazdów,
 - opracowanie algorytmu postępowania mającego na celu wyznaczenie współczynnika gotowości technicznej pojazdów przy wykorzystaniu transformaty Laplace'a oraz metod wnioskowania statystycznego,
 - opracowanie algorytmu postępowania zapewniającego maksymalizację zysku z redundancji pojazdów z jednoczesnym uwzględnieniem ograniczeń finansowych,
 - opracowanie programów komputerowych stanowiących elementy środowiska obliczeniowego wspomagającego proces podejmowania decyzji,
 - organizacja i wykonanie obliczeń eksperymentalnych,
 - analiza, interpretacja oraz zaprezentowanie w formie graficznej otrzymanych wyników uzyskanych z przeprowadzonych obliczeń,
 - opracowanie koncepcji oraz opisanie w formie artykułów naukowych metodyki postępowania zapewniającej optymalizację procesu decyzyjnego w systemach transportowych.

Osiągnięcie przyjętego celu pracy wymaga realizacji następującego zakresu dysertacji:

1. analiza literatury dotyczącej modelowania i optymalizacji procesu decyzyjnego w systemach transportowych,
2. dobór metod i narzędzi badawczych,
3. opracowanie strategii postępowania umożliwiających wspomaganie podejmowania decyzji w obszarze transportu,
4. opracowanie metod modelowania i optymalizacji strategii postępowania wspierających procesy decyzyjne w systemach transportowych,
5. opracowanie wyników badań oraz sformułowanie wniosków.

Rozdział 3

Opis stosowanych metod i narzędzi badawczych

3.1. Programowanie liniowe

Po raz pierwszy określenie "programowanie liniowe" (*ang. linear programming*) zaproponował G. Dantzig w 1949 r. w pracy [105]. Programowanie liniowe jest metodą przeznaczoną do rozwiązywania określonego typu modeli tj. modeli liniowych. Problem programowania liniowego można określić jako problem polegający na wyznaczeniu optimum (minimum lub maksimum) funkcji liniowej na zbiorze określonym przez układ warunków liniowych, tj. nierówności lub równań liniowych [106]. Jeżeli wspomniany zbiór jest podzbiorem przestrzeni dwuwymiarowej, wówczas taki problem można rozwiązać metodą graficzną [107, 108]. Uniwersalną metodę rozwiązywania problemu programowania liniowego w systemach transportowych, tzw. algorytm sympleks, zaproponowano w pracy [10]. Istnieje wiele praktycznych zadań programowania liniowego, które można rozwiązywać, po sprowadzeniu ich uprzednio do postaci standardowej zadań optymalizacji. Jednym z nich jest zagadnienie transportowe.

3.1.1. Modelowanie zagadnienia transportowego

Zagadnienie transportowe polega na zorganizowaniu sieci dystrybucji pewnego ładunku od ustalonych dostawców do określonych odbiorców. Każdy odbiorca składa zapotrzebowanie na ładunek oraz znane są zasoby każdego dostawcy. W zbilansowanym klasycznym zagadnieniu transportowym przyjmuje się założenie o równości popytu z podażą. Rozwiązanie problemu polega na ustaleniu tego, ile ładunku należy dostarczyć od każdego dostawcy do każdego odbiorcy. Jako kryterium optymalizacji można przyjąć np. minimalizację całkowitego kosztu transportu. Znany jest koszt transportu jednej jednostki ładunku pomiędzy dostawcami i odbiorcami. Całkowity koszt transportu jest równy sumie kosztu transportu na wszystkich połączeniach. W modelu matematycznym przyjmuje się następujące oznaczenia:

$m \in \mathbb{N}_+$ - liczba dostawców,

$n \in \mathbb{N}_+$ - liczba odbiorców,

$a_i \in \mathbb{R}_+$ - zasób i -tego dostawcy, $a_i > 0, i = 1, \dots, m$,

$b_j \in \mathbb{R}_+$ - zapotrzebowanie j -tego odbiorcy, $b_j > 0, j = 1, \dots, n$,

$C = [c_{ij}]_{m \times n}, c_{ij} \in \mathbb{R}_+$ - koszt transportu jednej jednostki ładunku od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy,

$X = [x_{ij}]_{m \times n}, x_{ij} \in \mathbb{R}_+^0$ - wielkość przewozu ładunku na trasie od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy,

$F_{obj}(X, C) \in \mathbb{R}_+$ - całkowity koszt transportu ładunku.

Funkcję celu można wyrazić za pomocą wzoru (3.1):

$$F_{obj}(X, C) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (3.1)$$

przy warunkach ograniczających (3.2) i (3.3):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j. \quad (3.3)$$

W sytuacji, gdy całkowity popyt jest równy zagregowanej podaży, wówczas zagadnienie transportowe jest zbilansowane i prawdziwe jest równanie (3.4):

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.4)$$

Zagadnienie transportowe jest niezbilansowane w przypadku, gdy podaż przewyższa popyt (3.5) lub popyt przewyższa podaż (3.6):

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j, \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3.6)$$

Jeżeli spełniony jest jeden z warunków (3.5) lub (3.6), to wówczas można sprowadzić zadanie do zbilansowanego wprowadzając fikcyjnego odbiorcę/dostawcę, który zrównoważy nadwyżkę popytu/podaży. W literaturze dostępnych jest wiele metod rozwiązywania zagadnienia transportowego, wśród których wyróżnić można metody proste i dualne. W metodach prostych w pierwszej kolejności konieczne jest wyznaczenie tzw. bazowego rozwiązania dopuszczalnego, które następnie w kolejnych iteracjach jest modyfikowane, w konsekwencji czego otrzymuje się rozwiązanie optymalne. Z kolei w metodach dualnych, wyznaczone ba-

zowe rozwiązanie dopuszczalne stanowi jednocześnie rozwiązanie optymalne. Należy zauważyć, że zagadnienie transportowe może mieć wiele rozwiązań optymalnych zapewniających taką samą wartość funkcji celu.

Rozwiązaniem dopuszczalnym zagadnienia transportowego jest macierz $X = [x_{ij}]$ spełniająca warunki (3.2) i (3.3), natomiast rozwiązaniem optymalnym jest rozwiązanie dopuszczalne minimalizujące funkcję celu (3.1). Macierz $X = [x_{ij}]$ nazywana jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym zagadnienia transportowego względem zbioru bazowego B , jeżeli:

$$(i, j) \notin B \Rightarrow x_{ij} = 0. \quad (3.7)$$

Zmienne $\{x_{ij} | (i, j) \in B\}$ oraz $\{x_{ij} | (i, j) \notin B\}$ nazywane są odpowiednio zmiennymi bazowymi i niebazowymi względem zbioru B . Rozwiązanie bazowe jest zdegenerowane, gdy liczba zmiennych bazowych jest równa $m + n - 1$. Gdy warunek dotyczący liczby elementów bazowych nie jest spełniony, to wówczas rozwiązanie jest niezdegenerowane. Występowanie degeneracji może spowodować wykonywanie iteracji w pętli uniemożliwiającej wyznaczenie rozwiązania optymalnego. W celu usunięcia degeneracji wykorzystuje się tzw. metodę perturbacji. Z dwóch zmiennych, które mogą wejść do rozwiązania i których wartości wynoszą 0, należy wybrać tę zmienną, dla której koszt transportu przyjmuje mniejszą wartość. Dokonując wyboru zmiennych zerowych konieczne jest spełnienie warunku, aby graf rozwiązania był grafem spójnym oraz bez cykli [7].

Algorytm transportowy polega na postępowaniu zgodnie z następującym schematem [107]:

1. Wyznaczyć pierwszy zbiór bazowy B oraz bazowe rozwiązanie dopuszczalne $X_B = [x_{ij}^B]$,
2. Wyznaczyć macierz $C_B = [c_{ij}^B]$ równoważną macierzy kosztów $C = [c_{ij}]$ względem zbioru bazowego B ,
3. Dla jednej z niewiadomych u_1, u_2, \dots, u_m i v_1, v_2, \dots, v_n należy przyjąć dowolną wartość:
 - a) pozostałe niewiadome należy wyznaczyć rozwiązując układ równań $c_{ij} + u_i + v_j = 0$ dla $(i, j) \in B$,
 - b) wyznaczyć $c_{ij}^B = c_{ij} + u_i + v_j$ gdzie $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.
4. Dokonać sprawdzenia, czy macierz C_B jest macierzą nieujemną. Jeżeli $C_B \geq 0$ wówczas X_B jest rozwiązaniem optymalnym. W przeciwnym przypadku należy ponownie wykonać krok 4.
5. Wyznaczyć nowy zbiór bazowy B_1 oraz odpowiadające mu bazowe rozwiązanie dopuszczalne $X_{B_1} = [x_{ij}^{B_1}]$:
 - a) wyznaczyć węzeł (k, l) spełniający warunek $c_{kl}^B = \min_{(i,j)} c_{ij}^B$,
 - b) wyznaczyć cykl Γ zawarty w zbiorze $B \cup \{(k, l)\}$. Cykl ten należy podzielić na półcykl dodatni i ujemny Γ_1 i Γ_2 , zaliczając Γ_1 do (k, l) ,
 - c) wyznaczyć węzeł (p, q) półcyklu Γ_2 spełniający warunek $x_{pq}^B = \min_{(i,j) \in \Gamma_2} x_{ij}^B$,

- d) przyjąć $B_1 = B \cup \{(k, l)\} - \{(p, q)\}$,
 e) wyznaczyć $X_{B_1} = [x_{ij}^{B_1}]$ korzystając z zależności:

$$x_{ij}^{B_1} = \begin{cases} x_{ij}^B + x_{pq}^B & \text{for } (i, j) \in \Gamma_1 \\ x_{ij}^B - x_{pq}^B & \text{for } (i, j) \in \Gamma_2 \\ x_{ij}^B & \text{for } (i, j) \notin \Gamma \end{cases}$$

6. Przejść do kroku 2.

3.1.2. Metoda kąta północno-zachodniego

Jedną z metod umożliwiających wyznaczenie bazowego rozwiązania dopuszczalnego zagadnienia transportowego jest metoda kąta północno-zachodniego nazywana również metodą górnego-lewego rogu. W metodzie tej nie uwzględnia się macierzy kosztów transportu, w związku z czym wartość funkcji celu obliczona dla wyznaczonego bazowego rozwiązania dopuszczalnego zazwyczaj jest większa od wartości minimalnej. Istotą metody jest porównanie dwóch wartości brzegowych określających tzw. kąt północno-zachodni. Wyznaczenie bazowego rozwiązania dopuszczalnego należy rozpocząć w pierwszej komórce górnego-lewego rogu, której odpowiadają określone wartości podaży i popytu. W kolejnym kroku należy wybrać wartość mniejszą spośród podaży/popytu, wpisać w pole odpowiadające pierwszej komórce lewego narożnika i następnie o wpisaną wartość należy pomniejszyć zarówno podaż, jak i popyt. W przypadku wyczerpania zasobów lub zaspokojenia zapotrzebowań konieczne jest wykreślenie pozostałych komórek odpowiednio w wierszu lub w kolumnie. Postępując analogicznie dalej, w wyniku kolejnych iteracji otrzymuje się bazowe rozwiązanie dopuszczalne [4].

3.1.3. Metoda minimalnego elementu w wierszu

Metoda minimalnego elementu w wierszu polega na dokonaniu wyboru takiego elementu w pierwszym wierszu macierzy kosztów C , dla którego koszt transportu jednej jednostki ładunku od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy jest minimalny. Dla wskazanego elementu c_{ij} należy odnaleźć mniejszą spośród odpowiadających mu wartości popytu i podaży i następnie wpisać tę wartość w komórkę odpowiadającą minimalnemu elementowi wiersza pierwszego. W dalszej kolejności o wpisaną wartość należy zmniejszyć zarówno podaż, jak i popyt jednocześnie wykreślając z macierzy kosztów pozostałe komórki w wierszu lub w kolumnie w zależności od tego, czy zaspokojono zapotrzebowania lub też wyczerpane zostały zasoby. Przechodząc do kolejnych wierszy oraz powielając opisany schemat postępowania wyznaczone zostaje bazowe rozwiązanie dopuszczalne [4].

3.1.4. Metoda minimalnego elementu w macierzy

Wyznaczenie bazowego rozwiązania dopuszczalnego, przy wykorzystaniu metody minimalnego elementu w macierzy, rozpoczyna się od wskazania najmniejszej wartości spośród wszystkich elementów macierzy kosztów C . Jeżeli w macierzy kosztów występują dwa lub więcej elementów o minimalnej wartości, to wówczas należy wybrać dowolny z nich. Następnie, dla wybranego minimalnego elementu c_{ij} należy odnaleźć mniejszą spośród przyporządkowanych mu wartości popytu i podaży oraz wpisać tę wartość w komórkę odpowiadającą minimalnemu elementowi macierzy kosztów C . W kolejnym kroku wpisaną wartość odejmuje się zarówno od popytu, jak i od podaży, jednocześnie wykreślając z macierzy kosztów C pozostałe komórki w wierszu lub w kolumnie, w zależności od wyczerpania zasobów lub zaspokojenia zapotrzebowań. Kontynuując wyszukiwanie kolejnych minimalnych wartości kosztów w macierzy C oraz powtarzając opisaną procedurę w konsekwencji otrzymuje się bazowe rozwiązanie dopuszczalne [4].

3.1.5. Metoda VAM

Mając na celu wyznaczenie bazowego rozwiązania dopuszczalnego za pomocą metody VAM, niezbędne jest obliczenie tzw. wskaźników, czyli różnic pomiędzy najtańszą i drugą co do wartości kosztu możliwością dostawy odpowiednio w każdym wierszu i w każdej kolumnie. W kolejnym kroku konieczne jest wyznaczenie największej wartości spośród wszystkich obliczonych wskaźników. W sytuacji, gdy najwyższy wskaźnik odpowiada kolumnie, wówczas należy odnaleźć minimalny koszt w rozpatrywanej kolumnie. Jeżeli najwyższa różnica odpowiadałaby wierszowi, to wówczas należałoby wskazać najniższy koszt w danym wierszu. W komórce odpowiadającej wskazanemu minimalnemu elementowi c_{ij} należy wpisać mniejszą z odpowiadających mu wartości popytu lub podaży. Następnie, o wpisaną wartość zmniejszony zostaje popyt i podaż. Jednocześnie z macierzy kosztów C wykreśla się komórki, w których wyczerpano zasoby lub zaspokojono zapotrzebowania. Zaprezentowany sposób postępowania należy powtarzać do momentu całkowitego rozdysponowania ładunku pomiędzy dostawcami i odbiorcami [4].

3.1.6. Metoda KSAM

Kolejną iteracyjną metodą prowadzącą do wyznaczenia bazowego rozwiązania dopuszczalnego zagadnienia transportowego jest metoda KSAM, w której pierwszy etap polega na obliczeniu współczynników r_{ij} oraz r_{ji} gdzie i, j oznaczają odpowiednio numery dostawców i odbiorców. Zaproponowany współczynnik r_{ij} stanowi iloraz popytu i podaży natomiast współczynnik r_{ji} wyraża iloraz podaży i popytu w ramach rozpatrywanej sieci dystrybucji. W kolejnym etapie należy wyznaczyć macierze A i B tzw. ważonych kosztów transportu,

z których pierwsza stanowi iloczyn elementów macierzy współczynników r_{ij} oraz elementów macierzy kosztów transportu natomiast druga macierz jest iloczynem elementów macierzy współczynników r_{ji} oraz elementów macierzy kosztów transportu. Następnie konieczne jest odnalezienie minimalnego ważonego kosztu transportu oddzielnie dla każdej z macierzy A i B . W komórce odpowiadającej wskazanemu minimalnemu ważonemu kosztowi transportu należy wpisać wartość większą spośród odpowiadających jej wartości podaży lub popytu. Kontynuując wyszukiwanie kolejnych minimalnych wartości ważonych kosztów transportu oraz powtarzając opisaną procedurę otrzymuje się bazowe rozwiązanie dopuszczalne [6].

3.1.7. Metoda MDED

Pierwszy etap metody MDED polega na wyznaczeniu różnicy pomiędzy dwiema największymi wartościami w każdym wierszu macierzy kosztów transportu. W drugim etapie należy obliczyć różnicę pomiędzy maksymalną i minimalną wartością kosztu w każdej kolumnie macierzy kosztów transportu. W dalszej kolejności dla maksymalnej wartości uzyskanej w etapie pierwszym i drugim niezbędne jest odnalezienie minimalnego kosztu transportu. Jeżeli maksymalna różnica odpowiadałaby dwóm lub więcej komórkom, to wówczas należałoby wybrać komórkę kosztu znajdującą się w skrajnym lewym górnym rogu macierzy kosztów. Dla wskazanej komórki należy odnaleźć mniejszą spośród odpowiadających jej wartości podaży i popytu. Następnie o wpisaną wartość należy zmniejszyć popyt i podaż, jednocześnie wykreślając z macierzy kosztów komórki, w których wyczerpano zasoby lub zaspokojono zapotrzebowania. Opisany schemat postępowania należy powtarzać do momentu całkowitego rozdysponowania ładunku pomiędzy odbiorcami i dostawcami [6].

3.1.8. Metoda Blocha-Schmigalli

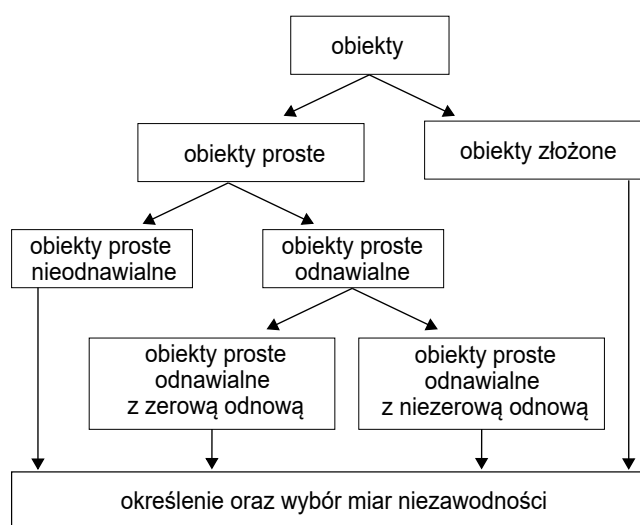
Metoda Blocha-Schmigalli może być wykorzystana m.in. do minimalizacji czasu lub kosztów transportu. Metoda ta przeznaczona jest do planowania rozmieszczenia w siatce trójkątów równobocznych punktów nadania/odbioru w taki sposób, aby punkty pomiędzy którymi następuje największy przepływ danego materiału zostały zlokalizowane jak najbliżej siebie. W pierwszym etapie konieczne jest określenie liczby punktów oraz powiązań występujących pomiędzy nimi. Następnie, w centralnym miejscu siatki trójkątów rozmieszcza się dwa punkty najbardziej ze sobą powiązane. W następnym kroku niezbędne jest wskazanie kolejnych punktów o największej liczbie powiązań z punktami, które już zostały usytuowane w siatce trójkątów. Jeżeli kolejny po pierwszej parze punkt ma powiązania z dwoma punktami już uwzględnionymi, to wówczas zostaje on umieszczony w węźle, tworząc w ten sposób trójkąt równoboczny. Jeżeli miałby powiązanie tylko z jednym uwzględnionym już punktem, to wówczas zostałby umiejscowiony w węźle z nim sąsiadującym. Procedurę należy kontynuować do momentu rozmieszczenia w siatce trójkątów wszystkich punktów [109].

3.2. Badanie niezawodności obiektów technicznych

Pojęciem pierwotnym w teorii niezawodności jest obiekt, którym może być dowolne urządzenie techniczne, zespół urządzeń technicznych lub przedmiot nie nazywany potocznie technicznym. Niezawodność obiektu to własność charakteryzująca zdolność obiektu do wykonywania określonych funkcji, w określonych warunkach oraz w określonych przedziałach czasu. W zależności od przeznaczenia obiektu oraz warunków eksploatacji niezawodność obejmuje następujące własności:

- nieuszkodzalność - zdolność obiektu do ciągłego zachowania stanu fizycznego, umożliwiającego spełnienie żądanych funkcji podczas wykonywania zadania,
- trwałość - możliwość wielokrotnego przywracania obiektowi stanu zdatności po kolejnych awariach i naprawach,
- przechowywalność - zdolność obiektu do zachowania stanu zdatności w warunkach przechowywania oraz co najmniej bezpośrednio po zakończeniu okresu przechowywania,
- naprawialność - podatność obiektu na wykonywanie napraw w określonych warunkach eksploatacji z wykorzystaniem konkretnych metod oraz środków [110].

Obiekty podlegające badaniom niezawodnościowym można podzielić na klasy według schematu przedstawionego na Rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Klasy obiektów podlegających badaniom niezawodnościowym.

(źródło: opracowanie własne na podstawie [111])

Klasyfikacja obiektów jako prostych, złożonych, nieodnawialnych, odnawialnych jest arbitralną decyzją osoby prowadzącej badania. W przypadku obiektów prostych z zerową odnową, pomijanie czasu odnowy może wynikać z faktu relatywnie krótkiego czasu odnowy w stosunku do całego okresu eksploatacji obiektu. W zależności od przyjętej klasyfikacji konieczne jest zastosowanie odpowiednich modeli niezawodnościowych mających na celu wyznaczenie właściwych miar niezawodności. Podstawę badań niezawodności stanowi teo-

ria prawdopodobieństwa, co wynika z faktu, że właściwości niezawodnościowe obiektów są właściwościami probabilistycznymi i takimi metodami powinny być badane. Matematyczny opis umożliwiający wyznaczenie odpowiednich wskaźników niezawodności rozpatrywanych obiektów, przy jednoczesnym uwzględnieniu losowych zmian ich stanów fizycznych, warunków zewnętrznych oraz stawianych zadań, jest nazywany modelem niezawodnościowym. Model niezawodnościowy jest modelem probabilistycznym. W związku z tym niezbędne jest prawidłowe określenie rozkładu prawdopodobieństwa rozpatrywanych w modelu zmiennych losowych. Weryfikacja statystyczna odpowiednio sformułowanych hipotez dotyczących typu rozkładu prawdopodobieństwa ma fundamentalne znaczenie dla właściwego prowadzenia badań w obszarze niezawodności.

3.2.1. Model matematyczny obiektu technicznego nieodnawialnego

Modelem matematycznym obiektu technicznego nieodnawialnego, opisującym jego niezawodność, rozumianą jako zdolność do realizacji stawianych zadań w określonych warunkach i znanym przedziale czasowym, jest nieujemna oraz ciągła zmienna losowa T oznaczająca czas do awarii obiektu [112]. Charakterystyki tej zmiennej losowej są miarami niezawodnościowymi obiektu. Podstawową miarą niezawodności obiektu w przedziale czasu $[0, t]$ jest prawdopodobieństwo określone wzorem (3.8):

$$R(t) = P(T \geq t) \quad \text{dla } t \geq 0. \quad (3.8)$$

Funkcja niezawodności obiektu $R(t)$, dla każdego $t \geq 0$, ma wartość równą prawdopodobieństwu zdarzenia polegającego na braku uszkodzenia się obiektu co najmniej do momentu t , czyli prawdopodobieństwu przebywania obiektu do chwili t w stanie zdatności.

Funkcję, która dla każdego $t \geq 0$ przyjmuje wartość prawdopodobieństwa zdarzenia, że czas do uszkodzenia obiektu jest mniejszy od zadanej chwili t określa się mianem funkcji zawodności opisanej dystrybuantą (3.9):

$$F(t) = P(T < t) = 1 - R(t). \quad (3.9)$$

Jeżeli funkcja niezawodności jest absolutnie ciągła, wówczas może być wyrażona za pomocą zależności (3.10):

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(u) du \quad \text{dla } t \geq 0. \quad (3.10)$$

Funkcja spełniająca warunek (3.10) jest nazywana gęstością prawdopodobieństwa. We wszystkich punktach ciągłości gęstość prawdopodobieństwa jest wyrażona wzorem (3.11):

$$f(t) = \frac{d}{dt} [F(t)] = -\frac{d}{dt} [R(t)]. \quad (3.11)$$

Jeżeli istnieje gęstość prawdopodobieństwa, wówczas definiowana jest też funkcja intensywności uszkodzeń określona równaniem (3.12):

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt} [\ln R(t)] = \frac{f(t)}{R(t)}. \quad (3.12)$$

Funkcja intensywności uszkodzeń zmiennej losowej T oznacza warunkową gęstość rozkładu prawdopodobieństwa czasu powstania uszkodzenia w chwili t , pod warunkiem, że awarii nie było do chwili t .

Korzystając ze wzoru Taylora możliwe jest wyznaczenie przybliżeń (3.13) oraz (3.14):

$$f(t) \approx \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad (3.13)$$

$$\lambda(t) \approx \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)\Delta t}. \quad (3.14)$$

Z wzoru (3.13) wynika interpretacja gęstości prawdopodobieństwa, która jest rozumiana jako spadek niezawodności w małym przedziale czasowym o długości Δt . Natomiast zależność (3.14) oznacza, że intensywność uszkodzeń jest względnym spadkiem niezawodności obiektu przypadającym na jednostkę czasu.

Miarą wyczerpywania się zapasu możliwości wykonania przez obiekt zadania jest funkcja wiodąca lub inaczej skumulowana intensywność uszkodzeń opisana wzorem (3.15):

$$\Lambda(t) = -\ln R(t) = \int_0^t \lambda(u) du \text{ dla } t \geq 0. \quad (3.15)$$

Warunkowa funkcja niezawodności oznaczająca prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia polegającego na zachowaniu przez obiekt stanu zdatności jeszcze przez odcinek czasu o długości co najmniej τ pod warunkiem, że do chwili t obiekt się nie uszkodził, można wyrazić korzystając z zależności (3.16):

$$R_t(\tau) = \frac{P(T \geq t + \tau)}{P(T \geq t)} = \frac{R(t + \tau)}{R(t)}. \quad (3.16)$$

Bezwarunkowe prawdopodobieństwo braku uszkodzenia w przedziale czasu $(t, t + \tau)$ określone jest wzorem (3.17):

$$P(t, t + \tau) = 1 - \int_t^{t+\tau} f(u) du = 1 - (R(t) - R(t + \tau)). \quad (3.17)$$

Znajomość prawdopodobieństwa $P(t, t + \tau)$ ma znaczenie, gdy w chwili $t = 0$ planuje się wykonanie przez obiekt zadania w przedziale czasu $(t, t + \tau)$, w którym t oznacza planowaną chwilę rozpoczęcia zadania, w trakcie którego wystąpienie awarii wiązałoby się z poniesieniem strat. W związku z tym często konieczne jest określenie takiej chwili $t \leq 0$, dla której wartość prawdopodobieństwa $P(t, t + \tau)$ będzie największa.

Każdą z przedstawionych funkcji charakteryzujących czas zdatności obiektu można wyrazić poprzez dowolną, inną spośród nich [112]. Przytoczone funkcyjne wskaźniki niezawodności umożliwiają pełną charakterystykę probabilistyczną modelu niezawodnościowego obiektu nieodnawialnego [110].

W teorii niezawodności, poza charakterystykami funkcyjnymi, często wykorzystuje się również charakterystyki liczbowe np. oczekiwany czas pracy do uszkodzenia. Jeżeli znana jest funkcja niezawodności $R(t)$, wówczas oczekiwany czas pracy do uszkodzenia, dla danych zmiennych losowych T , można obliczyć zgodnie z zależnością (3.18):

$$ET = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt. \quad (3.18)$$

W odniesieniu do obiektów nieodnawialnych wartość oczekiwana zmiennej losowej T często nazywana jest również oczekiwanym czasem zdatności, który można obliczyć korzystając m.in. z metod całkowania numerycznego.

Miarą rozrzutu wokół wartości oczekiwanej jest wariancja zmiennej losowej T określona równaniem (3.19):

$$D^2(T) = \int_0^{\infty} (t - ET)^2 f(t) dt. \quad (3.19)$$

Liczbową miarę niezawodności stanowi również odchylenie standardowe opisane wzorem (3.20):

$$\sigma(T) = \sqrt{D^2(T)}. \quad (3.20)$$

Kwantyl t_p zmiennej losowej T jest chwilą, dla której dystrybuanta $F(t_p)$ osiąga wartość p , co można wyrazić zależnością (3.21):

$$F(t_p) = P(T < t_p) = p. \quad (3.21)$$

Kwantyle odpowiednich rzędów często wykorzystywane są do ustalenia czasu gwarancji określonego przez producentów.

W celu wyznaczenia charakterystyk empirycznych zarówno funkcyjnych jak i liczbowych umożliwiającą ocenę niezawodności obiektów wybranych losowo z danej populacji wykorzystuje się empiryczne charakterystyki niezawodności. W modelu niezawodności obiektów technicznych nieodnawialnych przyjęto następujące oznaczenia [112]:

$n(t)$ - liczba obiektów zdalnych do chwili t ,

$m(t)$ - liczba obiektów niezdatnych do chwili t ,

n - liczba badanych obiektów.

Empiryczną funkcję niezawodności można opisać wzorem (3.22):

$$\bar{R}(t) = \frac{n(t)}{n} = \frac{n - m(t)}{n}. \quad (3.22)$$

Empiryczna funkcja zawodności może być wyrażona za pomocą zależności (3.23):

$$\bar{F}(t) = 1 - \bar{R}(t) = \frac{m(t)}{n}. \quad (3.23)$$

Korzystając ze wzoru (3.24) możliwe jest wyznaczenie empirycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa:

$$\bar{f}(t) = \frac{n(t) - n(t + \Delta t)}{n\Delta t} = \frac{m(\Delta t)}{n\Delta t}, \quad (3.24)$$

gdzie:

$m(\Delta t)$ - liczba obiektów, które uległy uszkodzeniu w odcinku czasu $(t, t + \Delta t)$.

Empiryczna funkcja intensywności uszkodzeń dla środków przedziałów opisana jest zależnością (3.25):

$$\bar{\lambda}(\bar{t}_i) = \frac{n(t_i) - n(t_{i+1})}{\bar{n}(\bar{t}_i)\Delta t_i} = \frac{m(\Delta t_i)}{\bar{n}(\bar{t}_i)\Delta t_i}, \quad (3.25)$$

gdzie:

$\bar{t}_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ - środek przedziału (t_i, t_{i+1}) ,

$\bar{n}(\bar{t}_i) = \frac{n(t_i) + n(t_{i+1})}{2}$ - średnia liczba obiektów zdalnych w przedziale (t_i, t_{i+1}) .

Na podstawie wzoru (3.26) możliwe jest wyznaczenie empirycznej skumulowanej intensywności uszkodzeń:

$$\bar{\Lambda}(t) = \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}(t_i)\Delta t, \quad (3.26)$$

gdzie:

k - liczba przedziałów o długości Δt .

Znajomość przebiegu funkcji intensywności uszkodzeń umożliwia uzyskanie istotnych informacji w zakresie m.in. właściwego wyposażenia obiektów w narzędzia oraz części zapa-

sowe, ustalania wielkości produkcji części zamiennych, celowości stosowania profilaktycznych wymian części lub zespołów, określania okresów eksploatacji obiektów.

3.2.2. Model matematyczny obiektu technicznego odnawialnego

Podstawowym założeniem teorii odnowienia jest założenie możliwości przywracania obiektowi stanu zdatności po jego uszkodzeniu. W elementarnej teorii odnowienia rozpatrywane są obiekty dwustanowe w sensie niezawodności [110]. Odnowa może polegać na wymianie całego obiektu na nowy, zastąpieniu elementów uszkodzonych nowymi elementami lub naprawie elementów uszkodzonych [112]. Jedynymi istotnymi zdarzeniami w eksploatacji obiektu prostego odnawialnego z niezerowym czasem odnowy są chwile uszkodzeń i odnowień, które przy niezerowej odnowie są chwilami różnymi. W modelu matematycznym obiektu technicznego odnawialnego z niezerowym czasem odnowy przyjęto następujące oznaczenia:

T_i - niezależne zmienne losowe oznaczające czasy zdatności, $i = 1, \dots, n$,

$E(T)$ - wartość oczekiwana zmiennej losowej - czas zdatności,

Θ_i - niezależne zmienne losowe oznaczające czasy niezdatności, $i = 1, \dots, n$,

$E(\Theta)$ - wartość oczekiwana zmiennej losowej - czas niezdatności,

$F(t)$ - dystrybuanta zmiennej losowej - czas zdatności,

$\tilde{F}(s)$ - transformata Laplace'a dystrybuanty czasu zdatności,

$f(t)$ - funkcja gęstości zmiennej losowej - czas zdatności,

$\tilde{f}(s)$ - transformata Laplace'a funkcji gęstości czasu zdatności,

$G(t)$ - dystrybuanta zmiennej losowej - czas niezdatności,

$\tilde{G}(s)$ - transformata Laplace'a dystrybuanty czasu niezdatności,

$g(t)$ - funkcja gęstości zmiennej losowej - czas niezdatności,

$\tilde{g}(s)$ - transformata Laplace'a funkcji gęstości czasu niezdatności,

$\tilde{z}(s)$ - transformata Laplace'a funkcji $z(t)$, $t \in (0, \infty)$,

$z(t)$ - odwrotna transformata Laplace'a,

$\mathcal{L}[f(t) * g(t)]$ - przekształcenie Laplace'a splotu funkcji gęstości prawdopodobieństwa,

$H(t)$ - funkcja odnowy (oczekiwana liczba odnów w przedziale czasu $(0, t)$),

$\tilde{H}(s)$ - transformata Laplace'a funkcji odnowy,

$h(t)$ - funkcja gęstości odnowy,

$\tilde{h}(s)$ - transformata Laplace'a funkcji gęstości odnowy,

$H_u(t)$ - oczekiwana liczba uszkodzeń w przedziale $(0, t)$,

$\tilde{H}_u(s)$ - transformata Laplace'a oczekiwanej liczby uszkodzeń,

$K(t)$ - funkcja gotowości,

$\tilde{K}(s)$ - transformata Laplace'a funkcji gotowości,

$K_n(t)$ - współczynnik niegotowości,

K_n - stacjonarny współczynnik niegotowości,
 $K_g(t)$ - współczynnik gotowości technicznej,
 N - liczba badanych obiektów technicznych,
 n - całkowita liczba uszkodzeń obiektów technicznych (liczba obserwacji),
 T_p - średni czas pomiędzy uszkodzeniami,
 λ - parametr rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej - czas zdatności,
 T_n - średni czas naprawy,
 ν - parametr rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej - czas niezdatności,
 k - liczba przedziałów szeregu rozdzielczego,
 n_i - liczebności empiryczne dla testu χ^2 ,
 np_i - liczebności teoretyczne dla testu χ^2 ,
 W - obszar krytyczny dla testu χ^2 ,
 l - liczba parametrów rozkładu estymowanych z próby,
 α - poziom istotności.

Wielkością charakteryzującą zdolność obiektów do wykonywania zadań zgodnie z ich przeznaczeniem może być średnia długość okresów do chwili utraty zdatności po kolejnych naprawach w rozpatrywanym okresie eksploatacji. Alternatywny strumień odnowy to ciąg zmiennych losowych $T_1, \Theta_1, T_2, \Theta_2, T_3, \Theta_3, \dots$ w którym zmienne losowe T_1, T_2, T_3, \dots oznaczają czasy zdatności o dystrybuancie $F(t)$ i funkcji gęstości $f(t)$. Natomiast zmienne losowe $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$ oznaczają czasy niezdatności określone dystrybuantą $G(t)$ i gęstością $g(t)$. Miarami niezawodnościowymi są charakterystyki strumieni tych zmiennych losowych [113, 114].

Transformatą Laplace'a funkcji $z(t)$, gdzie $t \in (0, \infty)$ nazywa się funkcję $\tilde{z}(s)$ zmiennej zespolonej $s = i\omega$, określonej zależnością (3.27):

$$\mathcal{L}[z(t)] = \tilde{z}(s) = \int_0^{\infty} z(t)e^{-st} dt. \quad (3.27)$$

Transformatą odwrotną Laplace'a nazywa się przyporządkowanie transformacie $\tilde{z}(s)$ oryginału $z(t)$ opisanego równaniem (3.28):

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{z}(s)]. \quad (3.28)$$

W zastosowaniach technicznych istotne znaczenie ma przekształcenie Laplace'a spłotu np. funkcji gęstości prawdopodobieństwa określone wzorem (3.29):

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s). \quad (3.29)$$

Funkcja odnowy $H(t)$ określająca oczekiwaną liczbę odnów w przedziale czasu $(0, t)$ ma transformatę Laplace'a opisaną zależnością (3.30):

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)}{s[1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)]}. \quad (3.30)$$

Gęstość odnowy $h(t)$ ma transformatę Laplace'a określoną równaniem (3.31):

$$\tilde{h}(s) = \frac{\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)}{1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)}. \quad (3.31)$$

Oczekiwana liczba uszkodzeń $H_u(t)$ w przedziale $(0, t)$ ma transformatę Laplace'a wyrażoną za pomocą zależności (3.32):

$$\tilde{H}_u(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s[1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)]}. \quad (3.32)$$

Funkcja gotowości $K(t)$ (prawdopodobieństwo przebywania w stanie zdatności w ustalonej chwili $t > 0$) ma transformatę Laplace'a opisaną wzorem (3.33):

$$\tilde{K}(s) = [1 - \tilde{f}(s)] \left[\frac{1}{s} + \tilde{H}(s) \right]. \quad (3.33)$$

Uwzględniając równanie (3.30) otrzymano:

$$\tilde{K}(s) = \frac{1 - \tilde{f}(s)}{s[1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)]}. \quad (3.34)$$

Jeżeli dla każdego $t \geq 0$ niezależne zmienne losowe czasu zdatności T_1, T_2, T_3, \dots mają rozkład wykładniczy, dla którego dystrybuanta oraz funkcja gęstości określone są następującymi zależnościami (3.35) - (3.36):

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (3.35)$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (3.36)$$

wówczas korzystając z własności transformaty Laplace'a prawdziwe są równania (3.37) - (3.38):

$$\tilde{F}(s) = L[1 - e^{-\lambda t}] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda}, \quad (3.37)$$

$$\tilde{f}(s) = L[\lambda e^{-\lambda t}] = \frac{\lambda}{s + \lambda}. \quad (3.38)$$

Niezależne zmienne losowe czasu niezdatności $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$ charakteryzujące się rozkładem wykładniczym o dystrybuancie i gęstości opisanych wzorami (3.39) - (3.40):

$$G(t) = 1 - e^{-vt}, \quad (3.39)$$

$$g(t) = ve^{-vt}, \quad (3.40)$$

można wyrazić za pomocą transformaty Laplace'a w następujący sposób (3.41) - (3.42):

$$\tilde{G}(s) = L[1 - e^{-vt}] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + v}, \quad (3.41)$$

$$\tilde{g}(s) = L[ve^{-vt}] = \frac{v}{s + v}. \quad (3.42)$$

3.2.3. Metody rezerwowania w systemach

Zwiększenie niezawodności systemu jest możliwe dzięki wprowadzeniu redundancji, czyli dodatkowych środków lub możliwości ponad te, które są niezbędne do zapewnienia prawidłowej realizacji stawianych zadań. Redundancja nazywana jest również rezerwowaniem lub nadmiarem. Należy jednak pamiętać, że nadmiarowość często jest przyczyną dodatkowych kosztów. Planowanie redundancji systemu jest zadaniem optymalizacyjnym, w którym bardzo istotna jest znajomość wskaźników gotowości rozpatrywanych obiektów. Wyróżnić można następujące rodzaje redundancji:

- rezerwowanie układowe (strukturalne) - wprowadzenie do systemu dodatkowych elementów struktury, które w przypadku awarii elementów podstawowych mogą realizować ich zadania w systemie,
- rezerwowanie czasowe - wprowadzenie zapasu czasu niezbędnego do wykonania zadań, których realizacja może być opóźniona,
- rezerwowanie informacyjne - wprowadzenie dodatkowej informacji umożliwiającej wykrycie i skorygowanie błędów w celu zapewnienia prawidłowego działania systemu; nadmiar informacyjny mogą stanowić dodatkowe magazyny informacji, zabezpieczające system w przypadku utraty podstawowych zasobów informacyjnych,
- rezerwowanie funkcjonalne - wykorzystywanie w systemie elementów, które poza realizacją podstawowych funkcji są również zdadne do wykonywania dodatkowych zadań np. w sytuacjach awaryjnych.

Klasyfikację sposobów włączania elementów rezerwowych zobrazowano na Rysunku 3.2.



Rysunek 3.2: Klasyfikacja rezerwowania układowego.
(źródło: opracowanie własne na podstawie [110])

Rezerwowanie rozdzielcze ma miejsce wówczas, gdy każdy element podstawowy jest rezerwowany pewną liczbą elementów nadmiarowych. Rezerwowanie mieszane występuje w sytuacji, gdy dla części systemu stosuje się ogólną rezerwę układową, natomiast dla pozostałej części wykorzystuje się rezerwowanie rozdzielcze. Rezerwowanie ogólne polega na rezerwowaniu całego systemu identycznymi systemami. W przypadku rezerwowania pasywnego elementy podstawowe wraz z elementami nadmiarowymi są na stałe włączone do systemu, natomiast w rezerwowaniu aktywnym elementy rezerwowe są włączane do systemu dopiero w przypadku awarii elementów podstawowych. Redundancja aktywna wymaga stosowania układu kontrolno-przełączającego (przełącznika), którego zadaniem jest włączenie zdatnego elementu rezerwowego po awarii elementu podstawowego. Przełącznik charakteryzują następujące parametry:

τ_p - czas przełączenia,

P_p - prawdopodobieństwo poprawnego przełączenia,

$R_p(t)$ - prawdopodobieństwo zdatności przełącznika w chwili t .

W analizie niezawodności systemów z rezerwowaniem aktywnym wyróżnić można dwa rodzaje przełączników:

- idealny, dla którego $\tau_p = 0, R_p(t) = P_p = 1$,
- rzeczywisty, dla którego $\tau_p \geq 0, R_p(t) \leq 1, P_p \leq 1$.

Rezerwowanie przesuwające się może być stosowane w sytuacji, gdy element nadmiarowy może zostać włączony do systemu zamiast dowolnego uszkodzonego elementu podstawowego. W zależności od stopnia obciążenia elementów stanowiących rezerwę aktywną, wyróżnić można trzy rodzaje obciążeń:

- obciążenie całkowite (rezerwa gorąca) - elementy nadmiarowe będące w stanie gotowości do natychmiastowego realizowania zadań są obciążone tak, jak elementy podstawowe,
- obciążenie częściowe (rezerwa ciepła) - warunki eksploatacji w jakich znajdują się elementy nadmiarowe są łagodniejsze od warunków, w jakich realizują zadanie elementy podstawowe,
- obciążenie zerowe (rezerwa zimna) - elementy rezerwowe nie są obciążone i pozostając w rezerwie nie ulegają uszkodzeniom [110].

Wielkością określającą skuteczność redundancji jest tzw. zysk z rezerwowania opisany zależnością (3.43), zdefiniowany jako iloraz wybranej miary (wskaźnika) niezawodności systemu z uwzględnieniem elementów nadmiarowych oraz wartości tej miary dla systemu bez redundancji:

$$\eta_{w(t)}(t) = \frac{w^*(t)}{w(t)}, \quad (3.43)$$

gdzie:

$w^*(t)$ - rozpatrywany wskaźnik niezawodności wyznaczony dla systemu złożonego z elementów podstawowych oraz nadmiarowych,

$w(t)$ - rozpatrywany wskaźnik niezawodności wyznaczony dla systemu złożonego wyłącznie z elementów podstawowych.

3.2.4. Metody całkowania numerycznego

Metody numeryczne wykorzystywane są w celu rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą operacji na liczbach. Wyniki uzyskane za pomocą metod numerycznych zazwyczaj są przybliżone co wynika z faktu, że wyznaczenie rozwiązania rozpatrywanego problemu metodami analitycznymi byłoby trudne lub niemożliwe. Praktyczne zastosowanie metod numerycznych obejmuje m.in. rozwiązywanie układów równań liniowych, nieliniowych oraz różniczkowych, aproksymację, interpolację, całkowanie [115]. Korzystając z metod całkowania numerycznego zrealizowano piąty etap badań niniejszej dysertacji, polegający na określeniu strategii postępowania prowadzącej do wyznaczenia oczekiwanego czasu zdatności rozpatrywanych obiektów. W badaniach zastosowano metodę: prostokątów, trapezów, Simpsona, złożoną metodę trapezów oraz złożoną metodę Simpsona. W skonstruowanym modelu matematycznym przyjęto następujące oznaczenia:

a - dolna granica całkowania,

b - górna granica całkowania,

t_i - równoodległe węzły kwadratury takie, że $t_i = a + \frac{(b-a)}{n^*}i$, $i = 0, \dots, n^*$,

h - długość najmniejszego podprzedziału dla kwadratur złożonych.

Metoda prostokątów polega na przybliżeniu obszaru ograniczonego wykresem funkcji przez prostokąty o podstawie równej długości kroku całkowania i wysokości równej funkcji w przedziale określonym przez krok całkowania. W literaturze, wzory numeryczne całkowania funkcji jednej zmiennej niezależnej nazywane są kwadraturami [115]. Kwadraturę prostokątów opartą na węźle $t_0 = \frac{a+b}{2}$ można zapisać jako (3.44):

$$\int_a^b R(t)dt \approx (b-a)R\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (3.44)$$

Metoda trapezów polega na przybliżeniu obszaru ograniczonego wykresem funkcji przez trapezy prostokątne o wysokości równej długości kroku całkowania i podstawach o długościach odpowiadających wartościom funkcji w punktach węzłowych na brzegu przedziału. Kwadraturę trapezów opartą na węzłach $t_0 = a$ oraz $t_1 = b$ należy obliczyć korzystając z zależności (3.45):

$$\int_a^b R(t)dt \approx \frac{(b-a)}{2}(R(a) + R(b)). \quad (3.45)$$

Metoda Simpsona polega na przybliżeniu obszaru ograniczonego wykresem funkcji przez funkcję kwadratową rozpiętą na wartościach funkcji całkowanej w punkcie środka przedziału całkowania, dla której bokami są wartości funkcji całkowanej w punktach brzegowych. Kwadraturę Simpsona opartą na węzłach $t_0 = a$, $t_1 = b$ oraz $t_2 = \frac{a+b}{2}$ można wyznaczyć w oparciu o wzór (3.46):

$$\int_a^b R(t)dt \approx \frac{(b-a)}{6} \left(R(a) + 4R\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(b) \right). \quad (3.46)$$

W celu poprawy dokładności obliczeń, często stosuje się podział rozpatrywanego przedziału całkowania na n podprzedziałów wyznaczając złożoną kwadraturę trapezów oraz złożoną kwadraturę Simpsona, które opisane są zależnościami (3.47) i (3.48):

$$\int_a^b R(t)dt \approx h \left(\frac{R(a) + R(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n^*-1} R(a+ih) \right), \quad h = \frac{b-a}{n^*}, \quad (3.47)$$

$$\int_a^b R(t)dt \approx \frac{h}{3} \left(\frac{R(a) + R(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n^*-1} R(a+ih) + 2 \sum_{i=0}^{n^*-1} R\left(a+ih + \frac{h}{2}\right) \right). \quad (3.48)$$

3.3. Modelowanie decyzji inwestycyjnych

Podjęcie właściwych decyzji inwestycyjnych jest niezbędne do zapewnienia prawidłowego funkcjonowania przedsiębiorstw. W procesie podejmowania decyzji najczęściej dokonuje się oceny efektywności oraz ryzyka inwestycji. Decyzje inwestycyjne mogą dotyczyć m.in. podjęcia lub rezygnacji z inwestycji, dokonania wyboru spośród możliwych alternatyw inwestycyjnych lub utworzenia portfela inwestycyjnego [116]. W procesie podejmowania decyzji właściwie przyjęta strategia postępowania umożliwia osiągnięcie sukcesu. Ze względu na różnorodność sytuacji decyzyjnych oraz indywidualne preferencje decydentów, szczególnie ważna jest umiejętność opracowywania i wykorzystywania efektywnych algorytmów wspomagających podejmowanie decyzji.

3.3.1. Decyzje przedsiębiorców

Dominującym czynnikiem, warunkującym decyzje racjonalnego przedsiębiorcy, jest stopa zwrotu wyrażająca możliwy poziom zysku z zainwestowanego kapitału [117, 118]. Stopę zwrotu z inwestycji w momencie t można wyznaczyć korzystając ze wzoru (3.49):

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad (3.49)$$

gdzie:

P_t - cena akcji w chwili t ,

P_{t-1} - cena akcji w chwili $t - 1$.

Decyzje przedsiębiorców, którym bardziej zależy na znajomości przyszłej stopy zwrotu niż obecnej, zwykle odnoszą się do przyszłości. Wiąże się to z występowaniem niepewności, w następstwie czego, przy analizie inwestycji rozpatrywany jest zbiór potencjalnych realizacji stóp zwrotu. Przyszła stopa zwrotu jest zmienną losową. Na podstawie znajomości rozkładu prawdopodobieństwa, podczas podejmowania decyzji inwestycyjnych istotne jest wyznaczenie oczekiwanej stopy zwrotu w oparciu o zależność (3.50):

$$E(R) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot R_i, \quad (3.50)$$

gdzie:

p_i - prawdopodobieństwo osiągnięcia i -tej możliwej stopy zwrotu akcji,

R_i - i -ta możliwa wartość stopy zwrotu,

m - liczba możliwych do osiągnięcia wartości stopy zwrotu.

W sytuacji, gdy rozkład nie jest znany, wówczas oczekiwaną stopę zwrotu można oszacować na podstawie danych z przeszłych okresów zgodnie ze wzorem (3.51):

$$E(R) = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}, \quad (3.51)$$

gdzie:

R_i - stopa zwrotu akcji realizowana w okresie i ,

n - liczba rozpatrywanych okresów.

Wraz ze wzrostem różnorodności stóp zwrotu wiąże się zwiększenie ryzyka. Gdy znany jest rozkład prawdopodobieństwa, to wariancję stopy zwrotu można wyznaczyć na podstawie wzoru (3.52):

$$V = \sum_{i=1}^m p_i (R_i - E(R))^2, \quad (3.52)$$

gdzie:

$E(R)$ - oczekiwana stopa zwrotu akcji.

W sytuacji, gdy rozkład prawdopodobieństwa nie jest znany, wyznaczenie wariancji możliwe jest dzięki zależności (3.53):

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - E(R))^2}{n - 1}. \quad (3.53)$$

3.3.2. Metody wnioskowania statystycznego

W statystyce matematycznej niezbędne jest dokonanie wyboru z całej populacji pewnej skończonej liczby elementów oraz zbadanie ich ze względu na pewną cechę, której rozkład opisuje zmienna losowa X . Ponieważ istnieje związek pomiędzy populacją a próbką wynikający z faktu, że rozkład wartości cechy w próbie reprezentacyjnej jest zbliżony do rozkładu wartości cechy w badanej populacji, w związku z czym, na podstawie wyników zaobserwowanej próby możliwe jest wyciągnięcie wniosków odnoszących się do badanej cechy w całej populacji [119]. Ciąg zmiennych losowych X_1, \dots, X_n nazywany jest n -elementową próbą losową, natomiast ciąg liczb x_1, \dots, x_n nazywany jest zaobserwowaną próbą losową lub inaczej próbką. Wnioskowanie statystyczne o modelach probabilistycznych zmiennych losowych w populacji obiektów na podstawie wyników badania próbki losowej, może polegać np. na weryfikacji hipotezy statystycznej dotyczącej postaci funkcyjnej rozkładu zmiennej losowej lub estymacji nieznanego wartości parametru rozkładu prawdopodobieństwa. Zarów-

no podczas weryfikacji hipotez statystycznych, jak i estymacji parametrów rozkładu, należy skorzystać z odpowiednio skonstruowanych statystyk testowych, których realizacje są funkcjami zaobserwowanych wyników badań próbki losowej. W estymacji punktowej za ocenę wartości parametru przyjmuje się konkretną wartość otrzymaną na podstawie wyników próby. Jeżeli rozkład badanej cechy zależy od nieznanego parametru θ , to parametr ten można oszacować na podstawie n -elementowej próby prostej X_1, \dots, X_n , czyli takiej, że zmienne losowe są niezależne i każda z nich ma rozkład zgodny z rozkładem badanej cechy populacji. Funkcja $g(X_1, \dots, X_n)$ będąca funkcją próby losowej X_1, \dots, X_n nazywana jest statystyką. Do przykładowych statystyk zaliczyć można m.in:

- średnią arytmetyczną z próby wyrażoną wzorem (3.54):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (3.54)$$

Wartość tej statystyki nazywana jest wartością średnią empiryczną i może być obliczona na podstawie wzoru (3.55):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.55)$$

gdzie x_i są wynikami próby,

- nieobciążoną wariancję z próby określoną za pomocą wzoru (3.56):

$$\widehat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad (3.56)$$

której realizacją jest nieobciążona wariancja empiryczna opisana zależnością (3.57):

$$\widehat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3.57)$$

- nieobciążone odchylenie standardowe z próby określone wzorem (3.58):

$$\widehat{S} = \sqrt{\widehat{S}^2}. \quad (3.58)$$

Wartość tej statystyki nazywana jest empirycznym nieobciążonym odchyleniem standardowym [120].

Zasadniczą domeną statystyki jest weryfikacja hipotez statystycznych. Poprzez hipotezę statystyczną należy rozumieć każdy sąd dotyczący populacji wydany bez przeprowadzenia szczegółowego badania i weryfikacji [121]. Prawdziwość hipotezy weryfikowana jest na podstawie wyników próby losowej. Hipotezy statystyczne można podzielić na dwie grupy:

- parametryczne (gdy dotyczą wartości parametrów statystycznych populacji),

- nieparametryczne (gdy dotyczą postaci rozkładu cech lub losowości próby).

W procesie weryfikacji hipotez statystycznych wyróżnić można następujące etapy:

1. Formułowanie hipotezy zerowej H_0 oraz alternatywnej H_1 ,
2. Określenie poziomu istotności,
3. Wybór testu statystycznego,
4. Wyznaczenie obszaru krytycznego,
5. Podjęcie decyzji o odrzuceniu lub nieodrzuceniu hipotezy zerowej przy określonym poziomie istotności.

Testy zgodności umożliwiają zweryfikowanie hipotezy zerowej (*ang. null hypothesis*), że analizowana zmienna losowa ma rozkład należący do odpowiedniej rodziny rozkładów. Do najważniejszych rozkładów zmiennych losowych zaliczyć można m.in. rozkład: normalny, t-Studenta, chi-kwadrat (χ^2), Fishera-Snedecora, logarytmiczno-normalny. Hipotezę zerową oraz alternatywną (*ang. alternative hypothesis*) można zapisać w następujący sposób:

$$H_0 : F(x) = F_0(x), \quad (3.59)$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x), \quad (3.60)$$

gdzie:

$F(x)$ - dystrybuanta empiryczna,

$F_0(x)$ - dystrybuanta teoretyczna.

Weryfikacja hipotezy o normalności rozkładu rozpatrywanych zmiennych losowych możliwa jest dzięki wykorzystaniu m.in. testu Shapiro–Wilka, w którym statystyka testowa SW–W określona jest wzorem (3.61):

$$SW-W = \frac{\left[\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} a_{n,i} (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (3.61)$$

gdzie:

x_i - nieuporządkowane wartości w próbie,

$x_{(i)}$ - wartości w próbie uporządkowane rosnąco,

\bar{x} - średnia arytmetyczna z próby,

n - liczebność próby,

$\left[\frac{n}{2} \right]$ - część całkowita połowy liczebności próby,

$a_{n,i}$ - stabilizowane współczynniki testu odczytane dla liczebności próby n . [122]

Weryfikacja hipotezy dotyczącej zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem hipotetycznym o znanej postaci dystrybuanty możliwa jest dzięki wykorzystaniu m.in. testu zgodności χ^2 Pearsona, w którym statystyka testowa χ^2 wyrażona jest zależnością (3.62):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (3.62)$$

gdzie:

k - liczba przedziałów szeregu rozdzielczego,

n_i - liczebności empiryczne (liczebność i -tego przedziału),

np_i - liczebności teoretyczne.

Podczas weryfikacji hipotez przy wykorzystaniu pakietów komputerowych często korzysta się z tzw. p-value czyli najmniejszego poziomu istotności, przy którym obliczona wartość testującej statystyki doprowadza do odrzucenia hipotezy zerowej. Podczas weryfikacji hipotez wyróżnić można następujące warianty decyzji [120]:

- jeżeli $p < \alpha$, $p < 0.01$, należy odrzucić H_0 na korzyść H_1 (decyzja jednoznaczna),
- jeżeli $p < \alpha$, $p > 0.01$, należy odrzucić H_0 na korzyść H_1 (decyzja niejednoznaczna),
- jeżeli $p > \alpha$, $p > 0.1$, nie ma podstaw do odrzucenia H_0 (decyzja jednoznaczna),
- jeżeli $p > \alpha$, $p < 0.1$, nie ma podstaw do odrzucenia H_0 (decyzja niejednoznaczna).

3.3.3. Dominacje stochastyczne

Dominacje stochastyczne na przestrzeni ostatnich lat coraz częściej są wykorzystywane w celu porównania rozkładów prawdopodobieństw. Doświadczenia wykonane przez Kahnemana i Tversky'ego [123] potwierdzają, że w przypadku inwestycji generujących zysk, decydenci częściej unikają lub starają się ograniczać ryzyko. Jednakże dokonując wyboru pomiędzy inwestycjami przynoszącymi stratę wykazują skłonność do podjęcia ryzyka. Zastosowanie dominacji stochastycznych w ujęciu statystycznym pozwala na dokonanie analizy różnych typów rozkładów asymetrycznych. Ponadto, możliwa jest weryfikacja hipotez o dominacjach stochastycznych dla testów nieparametrycznych. W przypadku, gdy stopy zwrotu porównywanych inwestycji są zgodne z rozkładem normalnym, dominację stochastyczną można opisać posługując się terminami odchylenia standardowego oraz wartości oczekiwanej.

Twierdzenie 3.1. [124] *Jeżeli zmienne losowe R_1 i R_2 mają rozkłady normalne o parametrach odpowiednio μ_1, μ_2 oraz σ_1, σ_2 , wówczas:*

$$XFSDY \iff \mu_1 \geq \mu_2 \text{ oraz } \sigma_1 = \sigma_2, \quad (3.63)$$

$$XSSDY \iff \mu_1 \geq \mu_2 \text{ oraz } \sigma_1 < \sigma_2. \quad (3.64)$$

W wielu praktycznych problemach dotyczących decyzji inwestycyjnych, często wykorzystywane są inne typowe rozkłady prawdopodobieństwa rozpatrywanych zmiennych losowych. W sytuacji, gdy stopy zwrotu porównywanych inwestycji byłyby zgodne np. z rozkładem: gamma, beta lub χ^2 , to wówczas należałoby zastosować twierdzenia (3.2) - (3.4):

Twierdzenie 3.2. [125] Niech $F_{\alpha,\beta}$ będzie rodziną rozkładów gamma z dodatnimi parametrami α i β o gęstości wyrażonej wzorem (3.65):

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} x^{\beta-1}, \quad x > 0, \quad (3.65)$$

wówczas:

1. $F_{\alpha_1,\beta}$ FSD $F_{\alpha_2,\beta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 < \alpha_2$,
2. $F_{\alpha_1,\beta}$ SSD $F_{\alpha_2,\beta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 < \alpha_2$,
3. F_{α,β_1} FSD F_{α,β_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_1 > \beta_2$,
4. F_{α,β_1} SSD F_{α,β_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_1 > \beta_2$,
5. F_{α_1,β_1} FSD F_{α_2,β_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 \leq \alpha_2$ i $\beta_1 \geq \beta_2$ oraz przynajmniej jedna nierówność jest ostra,
6. F_{α_1,β_1} SSD F_{α_2,β_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\beta_1}{\beta_2} \geq \max\left\{1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right\}$.

Jeśli rozpatrywana inwestycja ma rozkład gamma, to możemy ją identyfikować poprzez wartości parametrów (α, β) . Zgodnie z warunkami 1 i 2 w odniesieniu do inwestycji różniących się wartością pierwszego parametru, preferowana jest inwestycja o mniejszym α . Natomiast zgodnie z warunkami 3 i 4 preferowana jest inwestycja o większym β . Średnia dla inwestycji X o rozkładzie gamma z parametrami (α, β) wynosi $EX = \frac{\beta}{\alpha}$, zaś wariancja $D^2X = \frac{\beta}{\alpha^2}$.

Wniosek 3.1. Dla inwestycji różniących się co do wartości α lub β preferowana będzie inwestycja z większą średnią. Dla inwestorów postrzegających wariancję jako miarę ryzyka, wzrost ryzyka jest rekompensowany wzrostem średniej z inwestycji.

Twierdzenie 3.3. [125] Niech $F_{\alpha,\beta}$ będzie rodziną rozkładów beta z dodatnimi parametrami α i β o gęstości wyrażonej wzorem (3.66):

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} (1-x)^{\alpha-1}, \quad 0 < x < 1, \quad (3.66)$$

wówczas:

1. $F_{\alpha_1,\beta}$ FSD $F_{\alpha_2,\beta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 < \alpha_2$,
2. $F_{\alpha_1,\beta}$ SSD $F_{\alpha_2,\beta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 < \alpha_2$,
3. F_{α,β_1} FSD F_{α,β_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_1 > \beta_2$,

-
4. F_{α, β_1} SSD F_{α, β_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_1 > \beta_2$,
 5. F_{α_1, β_1} FSD F_{α_2, β_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 \leq \alpha_2$ i $\beta_1 \geq \beta_2$ oraz przynajmniej jedna nierówność jest ostra,
 6. F_{α_1, β_1} SSD F_{α_2, β_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\beta_1}{\beta_2} \geq \max\left\{1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right\}$.

Wniosek 3.2. Analiza relacji występujących pomiędzy optymalnymi zbiorami jest analogiczna do przeprowadzonej dla rozkładów gamma.

Twierdzenie 3.4. [125] Niech F_β będzie rodziną rozkładów χ^2 z dodatnim parametrem β o gęstości wyrażonej wzorem (3.67):

$$f_\beta(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta/2)} e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\beta}{2}-1}, \quad x > 0, \quad (3.67)$$

wówczas:

1. F_{β_1} FSD F_{β_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_1 > \beta_2$,
2. F_{β_1} SSD F_{β_2} wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta_1 > \beta_2$.

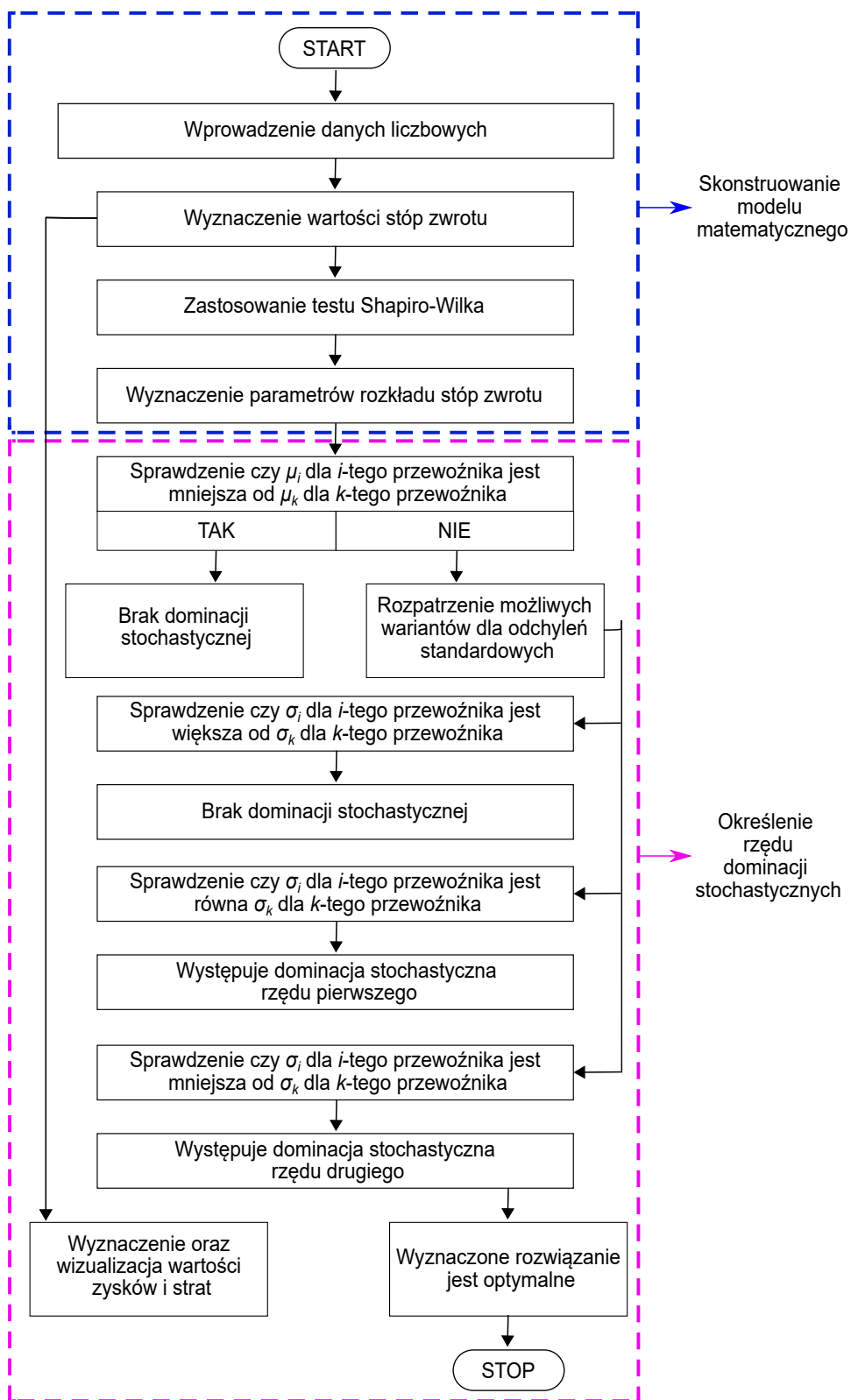
Wniosek 3.3. Należy zauważyć, że jeśli X ma rozkład χ^2 z parametrem β , to $\frac{X}{2}$ ma rozkład gamma z parametrami $\alpha' = 1$, $\beta' = \frac{\beta}{2}$. Jeżeli rozpatrywana inwestycja ma rozkład χ^2 z parametrem β , wówczas preferowana jest inwestycja o największej wartości parametru β .

Rozdział 4

Modelowanie i optymalizacja strategii postępowania w systemach transportowych

4.1. Metoda wyznaczania strategii postępowania z wykorzystaniem dominacji stochastycznych, zapewniająca maksymalizację zysku przez przedsiębiorców prowadzących działalność transportową

Przedsiębiorcy najczęściej dokonują analizy inwestycji w kontekście oczekiwanego zwrotu kapitału oraz potencjalnego ryzyka. W praktyce, trudne jest wskazanie jednoznacznej definicji ryzyka, przez co wygodniejsze jest posługiwanie się miarami opisującymi ryzyko. Podczas podejmowania decyzji, zwłaszcza finansowych, nie ma możliwości uniknięcia niepewności, dlatego też stosowanie dominacji stochastycznych jako narzędzia ułatwiającego podejmowanie decyzji jest w pełni uzasadnione. Na potrzeby niniejszej rozprawy doktorskiej opracowano strategię postępowania prowadzącą do maksymalizacji zysku przez przedsiębiorców prowadzących działalność transportową. Na podstawie rzeczywistych danych liczbowych dotyczących zysku netto trzech przewoźników tj.: DHL Poland, DPD oraz GLS skonstruowano model, w którym rozpatrywaną zmienną losową stanowiła stopa zwrotu z inwestycji. Okres badawczy obejmował miesiąc kalendarzowy w roku 2013, w którym wystąpiły 22 dni robocze. Integralną część modelu stanowił opracowany na potrzeby badań program komputerowy umożliwiający określenie rzędu dominacji stochastycznych występujących pomiędzy porównywanymi przewoźnikami. W badaniach wykorzystano pakiet STATISTICA (wersja 13.1) oraz GNU Octave (wersja 3.4.3). Szczegółowe wyniki przeprowadzonych obliczeń i analiz opisano w artykule [1] wchodzącym w skład niniejszej dysertacji. Na Rysunku 4.1 zilustrowano schemat zaproponowanej strategii postępowania umożliwiającej maksymalizację zysku z tytułu prowadzonej działalności.



Rysunek 4.1: Schemat zaproponowanej strategii postępowania umożliwiającej maksymalizację zysku przedsiębiorców.

(źródło: opracowanie własne)

W Tabeli 4.1 zestawiono rzeczywiste dane liczbowe dotyczące kosztu transportu przesyłek w zależności od ich wagi, na podstawie których przeprowadzono obliczenia.

Tabela 4.1. Dane liczbowe dotyczące kosztu transportu przesyłek w zależności od ich wagi dla poszczególnych firm przewozowych.

DHL		GLS		DPD	
Waga (kg)	Stawka (PLN)	Waga (kg)	Stawka (PLN)	Waga (kg)	Stawka (PLN)
0 – 1	7.6	0 – 1	7.0	0 – 1	7.91
1 – 5	7.7	1 – 5	7.0	1 – 5	7.91
5 – 10	7.8	5 – 10	7.0	5 – 10	8.11
10 – 20	11.0	10 – 20	16.0	10 – 20	9.33
20 – 31.5	13.0	20 – 31.5	16.0	20 – 31.5	12.33

Dane dotyczące zysku netto dla poszczególnych firm transportowych odnotowane w rozpatrywanym okresie badawczym przedstawiono na Rysunku 4.2.

	1 DHL	2 GLS	3 DPD
1	13620	4296	13500
2	18624	6564	12576
3	17400	5664	12600
4	20532	5928	15156
5	20208	8304	15204
6	20580	8580	14496
7	20748	7284	15708
8	17892	5448	12540
9	20628	7032	15840
10	19800	6696	15288
11	19428	8040	16596
12	20532	7416	16188
13	17820	8628	13116
14	20016	6912	14532
15	18096	7224	14004
16	19932	6036	14904
17	21168	5712	13176
18	16920	5340	12408
19	21240	6324	14988
20	20220	7068	12804
21	18504	6552	12792
22	19284	8820	12972

Rysunek 4.2: Zysk netto odnotowany przez rozpatrywane firmy transportowe.
(źródło: opracowanie własne)

Korzystając ze wzoru (3.49) oraz opracowanego na potrzeby niniejszych badań programu komputerowego wywołanego w GNU Octave (wersja 3.4.3) wyznaczono wartości stóp zwrotu dla każdego przewoźnika. Wyniki obliczeń zobrazowano na Rysunku 4.3.

```

Octave3.4.3
octave:2> Zmiana
Zmiana =

-26.869  -34.552   7.347
  7.034   15.890  -0.190
-15.254  -4.453 -16.865
  1.603 -28.613  -0.316
 -1.808  -3.217   4.884
 -0.810  17.792  -7.716
 15.962  33.700  25.263
-13.264 -22.526 -20.833
  4.182   5.018   3.611
  1.915 -16.716  -7.881
 -5.377   8.414   2.520
 15.219 -14.047  23.422
-10.971  24.826  -9.744
 10.610  -4.319   3.770
 -9.211  19.682  -6.039
 -5.839   5.672  13.115
 25.106   6.966   6.190
-20.339 -15.560 -17.214
  5.045 -10.526  17.057
  9.274   7.875   0.094
 -4.045 -25.714  -1.388

```

Rysunek 4.3: Wartości stóp zwrotu dla przewoźników DHL, GLS oraz DPD.
(źródło: opracowanie własne)

Na podstawie danych empirycznych, wiedząc, że średnia arytmetyczna oraz odchylenie standardowe z próby są estymatorami odpowiednio wartości oczekiwanej oraz odchylenia standardowego zmiennej losowej skonstruowano model, w którym rozpatrywaną zmienną losową stanowiła stopa zwrotu. W celu zweryfikowania hipotezy o normalności rozkładu stóp zwrotu wykorzystano pakiet STATISTICA (wersja 13.1). Za pomocą testu Shapiro–Wilka na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikowano hipotezy:

$$H_0 : F(x) = F_0(x), \tag{4.1}$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x), \tag{4.2}$$

gdzie:

$F(x)$ - dystrybuanta empiryczna,

$F_0(x)$ - dystrybuanta rozkładu normalnego.

W Tabeli 4.2 zestawiono wartości statystyki testowej SW–W oraz p-value dla rozpatrywanych przewoźników.

Tabela 4.2. Wyniki obliczeń dotyczące statystyk testowych oraz p-value w odniesieniu do poszczególnych firm transportowych.

Firma transportowa	Statystyka testowa SW-W	p-value
DHL	SW-W = 0.9986	p = 0.999
GLS	SW-W = 0.9795	p = 0.918
DPD	SW-W = 0.9698	p = 0.728

Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ należy stwierdzić, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, zatem stopy zwrotu mają rozkład normalny. W każdym rozpatrywanym przypadku został spełniony warunek $p > \alpha$. Ponadto należy zauważyć, że $p > 0.1$, zatem każda z decyzji jest jednoznaczna. Opracowany program umożliwia również wyznaczenie oddzielnie dla każdego przewoźnika średniej arytmetycznej z próby, wariancji z próby oraz odchylenia standardowego z próby stanowiących odpowiednio estymatory wartości oczekiwanej, wariancji oraz odchylenia standardowego. Otrzymane wyniki przedstawiono w Tabeli 4.3.

Tabela 4.3. Parametry rozkładu stóp zwrotu dla rozpatrywanych przewoźników.

Firma transportowa	Wartość oczekiwana	Wariancja	Odchylenie standardowe
DHL	-0.85	161.58	12.71
GLS	-1.64	347.53	18.64
DPD	0.91	152.60	12.35

Najniższą wartość oczekiwaną stóp zwrotu równą -1.64 oraz najwyższe odchylenie standardowe na poziomie 18.64 zaobserwowano w przypadku przewoźnika GLS. Z kolei, najwyższą wartość oczekiwaną równą 0.91 i jednocześnie najniższą wartość odchylenia standardowego wynoszącego 12.35 wyznaczono dla DPD. Program w dalszej kolejności, zgodnie z Twierdzeniem (3.1), dokonuje sprawdzenia tego, czy wartość oczekiwana μ_i wyznaczona dla i -tego przewoźnika jest mniejsza od wartości oczekiwanej μ_k wyznaczonej dla k -tego przewoźnika. W takiej sytuacji dominacja nie występuje, w związku z czym w tablicy wyników zostaje wyświetlona wartość 0. Następnie sprawdzony jest warunek, czy wartość oczekiwana μ_i jest większa lub równa od wartości oczekiwanej μ_k . W kolejnym kroku porównaniu podlegają możliwe warianty dla odchyleń standardowych. W przypadku równości odchyleń standardowych σ_i oraz σ_k dla porównywanych przewoźników w tablicy wyświetlona zostaje wartość 1 odpowiadająca dominacji stochastycznej rzędu pierwszego FSD. Jeżeli zaś $\sigma_i < \sigma_k$, to w tablicy wyświetla się wartość 2 oznaczająca dominację stochastyczną rzędu drugiego SSD. W sytuacji gdy $\sigma_i > \sigma_k$, wówczas dominacja nie występuje, co skutkuje wyświetleniem wartości 0 w tablicy. Jako podsumowanie działania programu w oknie poleceń wyświetlony zostaje rząd dominacji stochastycznych występujących pomiędzy rozpatrywanymi firmami transportowymi, co zobrazowano na Rysunku 4.4.

```

Octave3.4.3 x + - □ ×

octave:1> analiza_rentownosci

DHL |>-<|SSD| |
GLS| |>-<| |
DPD|SSD|SSD|>-<|

tablica =

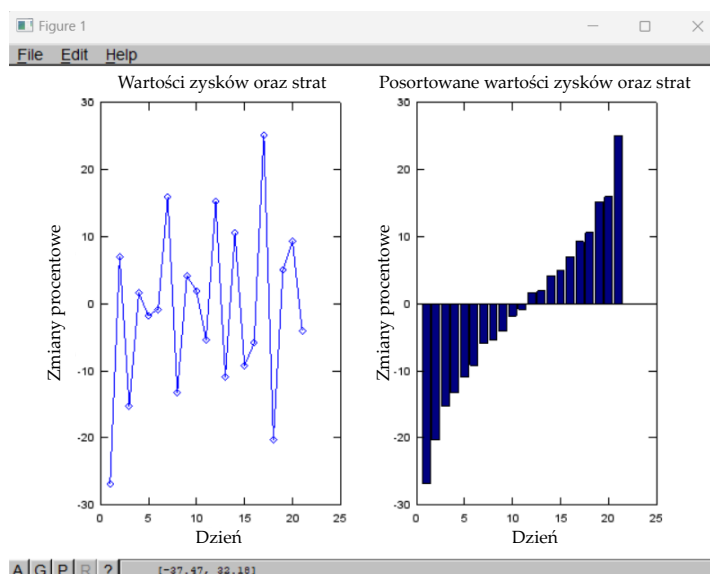
    0    2    0
    0    0    0
    2    2    0

```

Rysunek 4.4: Dominacje stochastyczne występujące pomiędzy rozpatrywanymi firmami transportowymi.

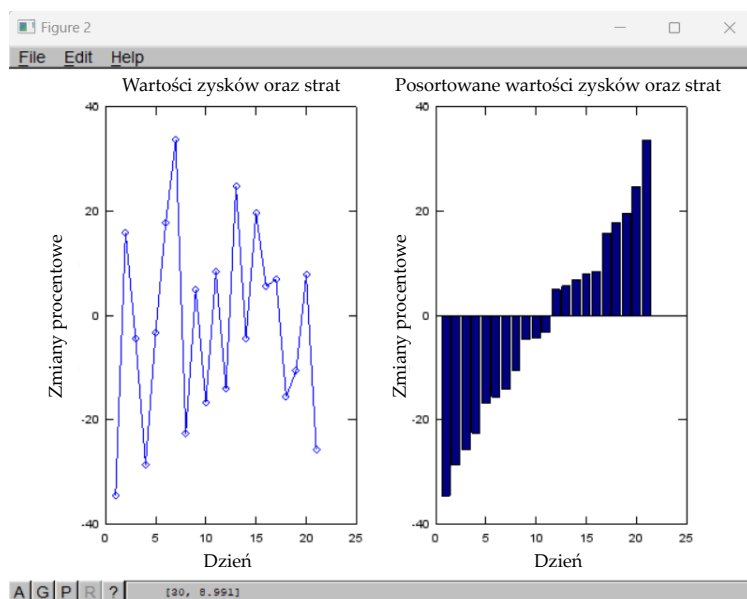
(źródło: opracowanie własne)

Dokonując analizy otrzymanych wyników należy zauważyć, że GLS nie dominuje stochastycznie nad pozostałymi przewoźnikami, czego przyczyną jest najniższa wartość oczekiwana oraz najwyższe odchylenie standardowe w stosunku do DHL oraz DPD. Pomiędzy przewoźnikami DHL oraz GLS stwierdzono występowanie dominacji stochastycznej rzędu drugiego. Należy zauważyć, że DPD dominuje w sensie dominacji stochastycznej rzędu drugiego zarówno DHL jak i GLS. Wynika to z faktu, że w przypadku DPD otrzymano najwyższą wartość oczekiwaną i jednocześnie najniższe odchylenie standardowe, co uzasadnia wskazanie tego właśnie przewoźnika jako optymalnego tzn. zapewniającego maksymalny zysk przy jednoczesnej minimalizacji ryzyka. Opracowany program umożliwia również wyświetlenie wykresów wartości zysków i strat oraz posortowanych wartości stóp zwrotu w rozpatrywanym okresie, co zilustrowano na Rysunkach (4.5 - 4.7).

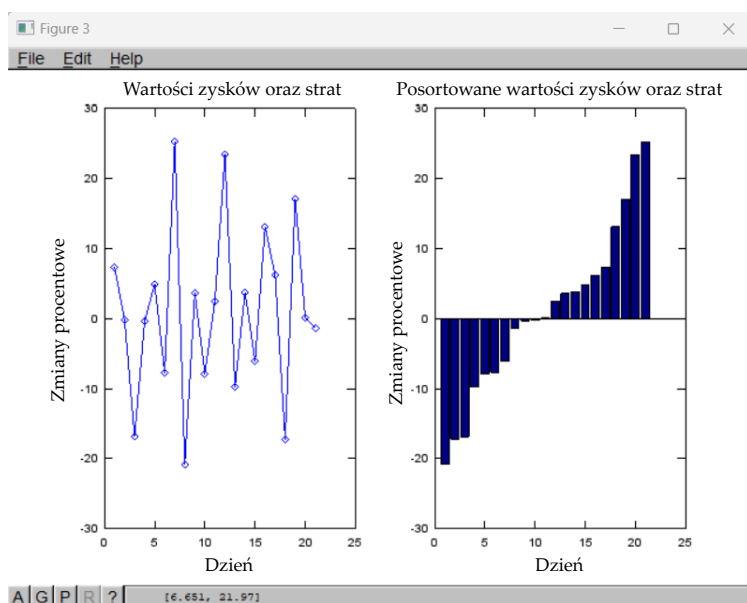


Rysunek 4.5: Wartości zysków i strat odnotowane dla DHL w okresie od 02-31.01.2013 r.

(źródło: opracowanie własne)



Rysunek 4.6: Wartości zysków i strat odnotowane dla GLS w okresie od 02-31.01.2013 r.
(źródło: opracowanie własne)



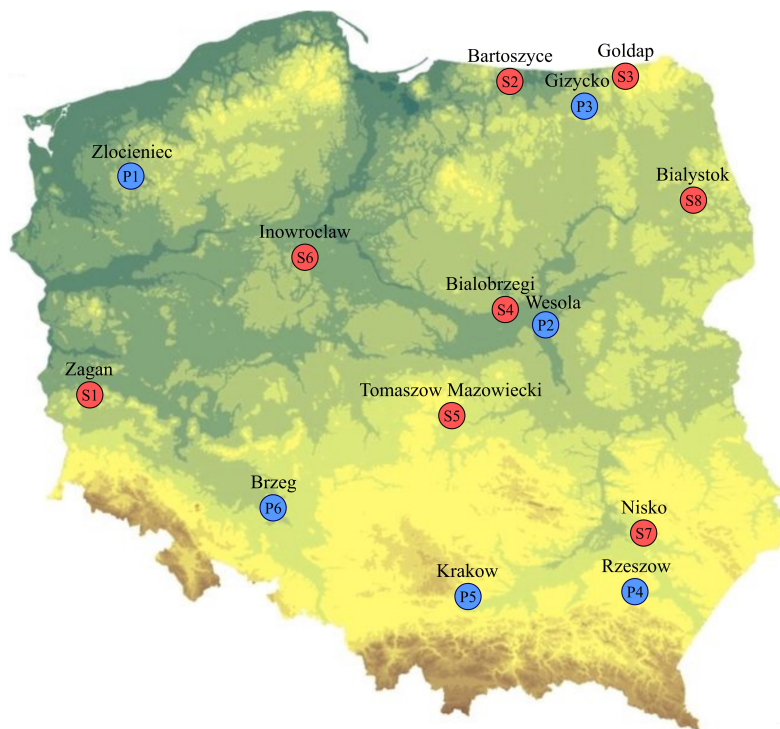
Rysunek 4.7: Wartości zysków i strat odnotowane dla DPD w okresie od 02-31.01.2013 r.
(źródło: opracowanie własne)

Analizując zyski oraz straty zaobserwowane przez przewoźników DHL oraz GLS widoczne jest pewne podobieństwo. W obu firmach odnotowano straty na początku miesiąca. Największą stratę w przypadku DHL zaobserwowano w dniu 18.01.2013 r., natomiast w GLS największy spadek wartości stóp zwrotu miał miejsce w dniu 07.01.2013 r. Ponadto, z wykresu posortowanych wartości stóp zwrotu wynika, że u obu przewoźników w ciągu miesiąca jedenastokrotnie stopy zwrotu osiągały wartość ujemną, natomiast wartość dodatnią

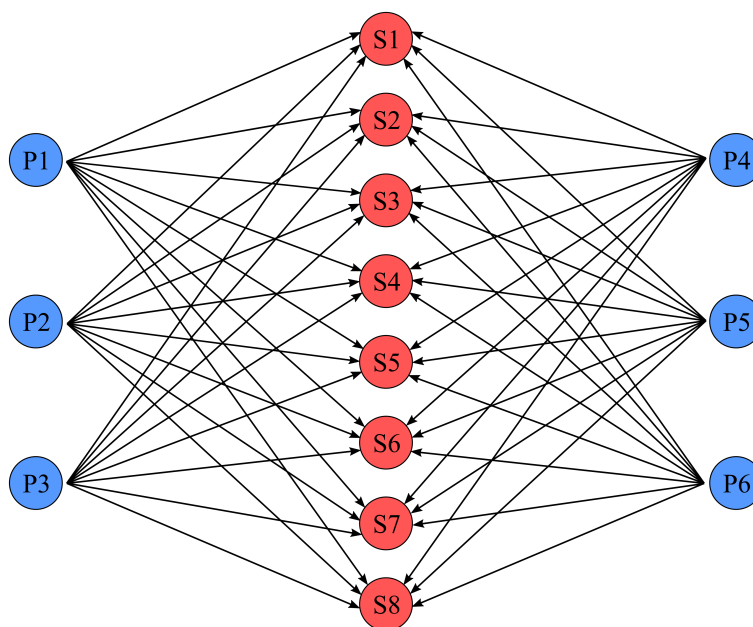
dziesięciokrotnie. Z kolei, w przypadku firmy DPD początek miesiąca zaowocował zyskiem stóp zwrotu. Największy spadek wartości stóp zwrotu nastąpił podobnie jak w GLS w dniu 7.01.2013 r. Z wykresu posortowanych wartości stóp zwrotu dla DPD wynika, że w ciągu miesiąca dziesięciokrotnie stopy zwrotu osiągnęły wartość ujemną.

4.2. Metoda umożliwiająca określenie strategii postępowania prowadzącej do rozwiązania problemu transportowego z wykorzystaniem programowania liniowego oraz optymalizacji wielokryterialnej

Integralną częścią systemu logistycznego Sił Zbrojnych RP jest podsystem transportu i ruchu wojsk, którego głównym celem jest zapewnienie terminowego przemieszczania wojsk, sprzętu oraz środków zaopatrzenia w czasie pokoju, kryzysu i wojny. System przewozowy ładunków wojskowych za pomocą transportu samochodowego w okresie pokoju charakteryzuje się wysoką stabilnością. Natomiast w okresie ćwiczeń lub działań bojowych szybko zmieniająca się sytuacja oraz wysokie tempo działań wymagają od dowódców wysiłku organizacyjnego wynikającego z konieczności modyfikacji tras dowozu zaopatrzenia. W związku z tym, szczególnego znaczenia nabiera umiejętność rozwiązywania problemów transportowych dla indywidualnie zdefiniowanych kryteriów. Na potrzeby niniejszej dysertacji opracowano strategię postępowania umożliwiającą rozwiązanie problemu transportowego. Zaproponowane rozwiązanie, które zaimplementowano w środowisku GNU Octave (wersja 3.4.3), umożliwiło wyznaczenie optymalnego pod względem kosztu transportu, zużycia paliwa oraz emisji CO₂ sposobu dystrybucji środków materiałowych dostarczanych na potrzeby wojska. Wyniki przeprowadzonych obliczeń i analiz szczegółowo opisano w publikacji [4] będącej jedną z podstaw niniejszej rozprawy doktorskiej. W badaniach wykorzystano następujące metody: kąta północno-zachodniego, najmniejszego elementu w macierzy, najmniejszego elementu w wierszu oraz VAM. Dane liczbowe niezbędne do przeprowadzenia obliczeń zaczerpnięto z Rozkazu Szefa Inspektoratu Wsparcia Sił Zbrojnych z dnia 19.02.2020 r. Miejscowości stanowiące punkty nadania i odbioru środków materiałowych oznaczono na Rysunku 4.8, natomiast na Rysunku 4.9 zobrazowano rozpatrywaną sieć dystrybucji.

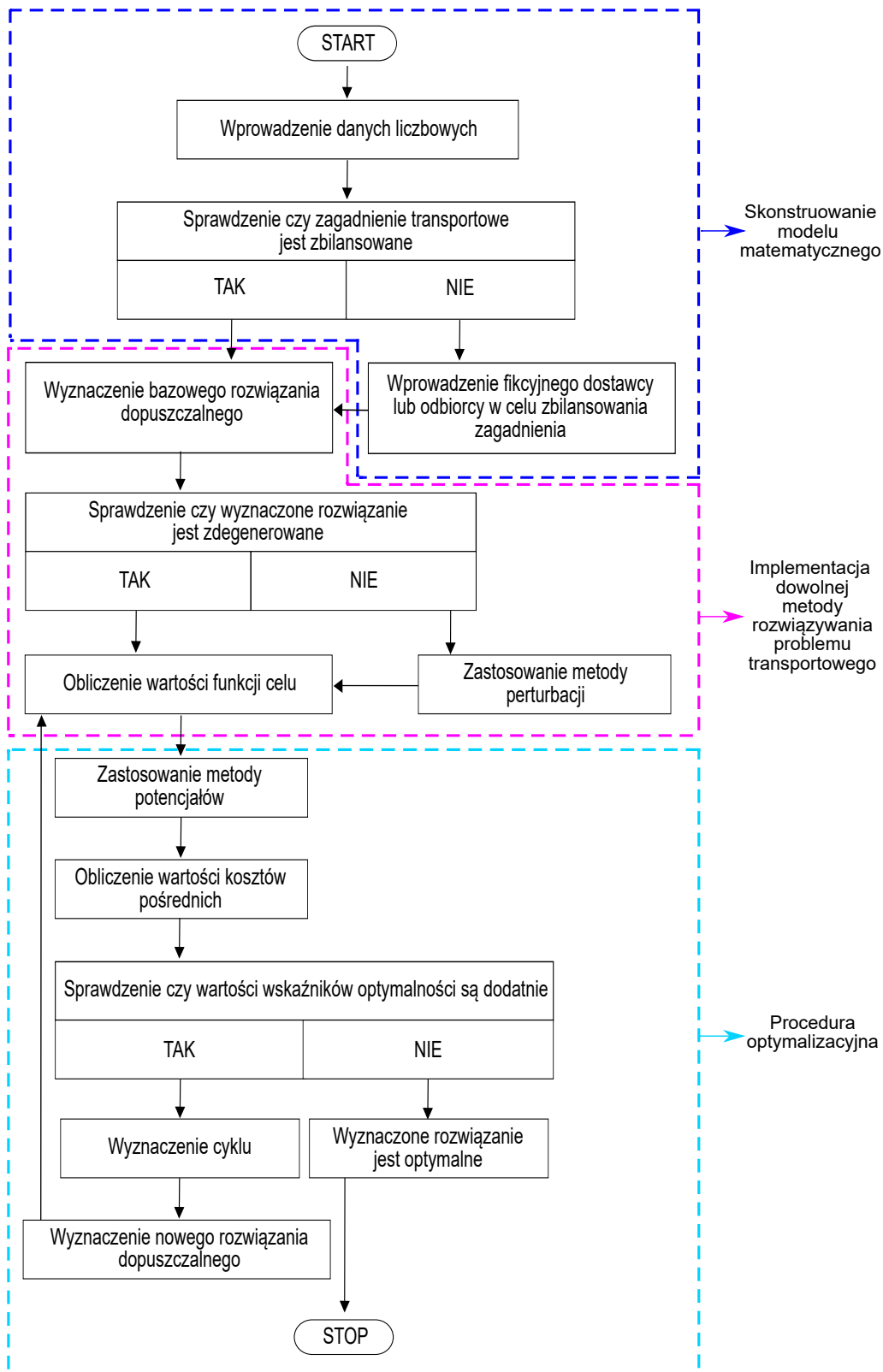


Rysunek 4.8: Lokalizacje dostawców i odbiorców środków materiałowych.
(źródło: [4])



Rysunek 4.9: Struktura sieciowa rozpatrywanego zagadnienia transportowego.
(źródło: [4])

Schemat blokowy zaproponowanego algorytmu zobrazowano na Rysunku 4.10.



Rysunek 4.10: Schemat zaproponowanej strategii postępowania prowadzącej do rozwiązania problemu transportowego.

(źródło: opracowanie własne)

W Tabeli 4.4 zestawiono dane liczbowe dotyczące kosztów transportu, podaży oraz popytu dla rozpatrywanego zagadnienia transportowego.

Tabela 4.4. Dane liczbowe dotyczące rozpatrywanego zagadnienia transportowego.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Popyt
S1	736.0	1400.0	1647.0	1504.0	1063.0	545.0	18
S2	1011.0	674.0	197.0	1556.0	1478.0	1400.0	29
S3	1349.0	791.0	156.0	1608.0	1530.0	1660.0	15
S4	1271.0	267.0	882.0	596.0	648.0	908.0	34
S5	1193.0	337.0	1037.0	674.0	622.0	700.0	26
S6	545.0	648.0	895.0	1530.0	1115.0	674.0	21
S7	1712.0	726.0	1219.0	156.0	493.0	1193.0	36
S8	1764.0	506.0	415.0	1089.0	1245.0	1375.0	21
Podaż	24	31	19	49	40	37	

W modelu matematycznym określono warunki ograniczające wynikające z zasobów dostawców oraz zapotrzebowań odbiorców:

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} &= 18, \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} &= 29, \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} &= 15, \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} &= 34, \\
 x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} &= 26, \\
 x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} &= 21, \\
 x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} &= 36, \\
 x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} + x_{85} + x_{86} &= 21, \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} &= 24, \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} + x_{82} &= 31, \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} + x_{83} &= 19, \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + x_{74} + x_{84} &= 49, \\
 x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} + x_{75} + x_{85} &= 40, \\
 x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} + x_{76} + x_{86} &= 37.
 \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia rozwiązania zagadnienia transportowego z wykorzystaniem opracowanego skryptu wywołanego w GNU Octave konieczne jest wprowadzenie danych wejściowych dotyczących: podaży, popytu, liczby dostawców, liczby odbiorców oraz kosztów transportu od i -tego dostawcy do j -tego odbiorcy, co zobrazowano na Rysunku 4.11.

```

Octave3.4.3
octave:1> PT
PROGRAMOWANIE LINIOWE - ROZWIAZANIE PROBLEMU TRANSPORTOWEGO

Podaj liczbe dostawcow, m = 6
Podaj liczbe odbiorcow, n = 8
Potrzebujemy macierz kosztow transportu (c) pomiedzy 6 dostawcami a 8 odbiorcami
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S1, c(1,1) = 736
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S1, c(1,2) = 1400
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S1, c(1,3) = 1647
Podaj koszt transportu od dostawcy P4 do odbiorcy S1, c(1,4) = 1504
Podaj koszt transportu od dostawcy P5 do odbiorcy S1, c(1,5) = 1063
Podaj koszt transportu od dostawcy P6 do odbiorcy S1, c(1,6) = 545
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S2, c(2,1) = 1011
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S2, c(2,2) = 674
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S2, c(2,3) = 197
Podaj koszt transportu od dostawcy P4 do odbiorcy S2, c(2,4) = 1556
Podaj koszt transportu od dostawcy P5 do odbiorcy S2, c(2,5) = 1478
Podaj koszt transportu od dostawcy P6 do odbiorcy S2, c(2,6) = 1400
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S3, c(3,1) = 1349
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S3, c(3,2) = 791
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S3, c(3,3) = 156
Podaj koszt transportu od dostawcy P4 do odbiorcy S3, c(3,4) = 1608
Podaj koszt transportu od dostawcy P5 do odbiorcy S3, c(3,5) = 1530
Podaj koszt transportu od dostawcy P6 do odbiorcy S3, c(3,6) = 1660
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S4, c(4,1) = 1271
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S4, c(4,2) = 267
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S4, c(4,3) = 882
Podaj koszt transportu od dostawcy P4 do odbiorcy S4, c(4,4) = 596
Podaj koszt transportu od dostawcy P5 do odbiorcy S4, c(4,5) = 648
Podaj koszt transportu od dostawcy P6 do odbiorcy S4, c(4,6) = 908
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S5, c(5,1) = 1193
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S5, c(5,2) = 337
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S5, c(5,3) = 1037
Podaj koszt transportu od dostawcy P4 do odbiorcy S5, c(5,4) = 674
Podaj koszt transportu od dostawcy P5 do odbiorcy S5, c(5,5) = 622
Podaj koszt transportu od dostawcy P6 do odbiorcy S5, c(5,6) = 700
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S6, c(6,1) = 545
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S6, c(6,2) = 648
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S6, c(6,3) = 895
Podaj koszt transportu od dostawcy P4 do odbiorcy S6, c(6,4) = 1530
Podaj koszt transportu od dostawcy P5 do odbiorcy S6, c(6,5) = 1115
Podaj koszt transportu od dostawcy P6 do odbiorcy S6, c(6,6) = 674
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S7, c(7,1) = 1712
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S7, c(7,2) = 726
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S7, c(7,3) = 1219
Podaj koszt transportu od dostawcy P4 do odbiorcy S7, c(7,4) = 156
Podaj koszt transportu od dostawcy P5 do odbiorcy S7, c(7,5) = 493
Podaj koszt transportu od dostawcy P6 do odbiorcy S7, c(7,6) = 1193
Podaj koszt transportu od dostawcy P1 do odbiorcy S8, c(8,1) = 1764
Podaj koszt transportu od dostawcy P2 do odbiorcy S8, c(8,2) = 506
Podaj koszt transportu od dostawcy P3 do odbiorcy S8, c(8,3) = 415
Podaj koszt transportu od dostawcy P4 do odbiorcy S8, c(8,4) = 1089
Podaj koszt transportu od dostawcy P5 do odbiorcy S8, c(8,5) = 1245
Podaj koszt transportu od dostawcy P6 do odbiorcy S8, c(8,6) = 1375
Podaj liczbe towarow do dostarczenia przez dostawce P1, podaz(1) = 24
Podaj liczbe towarow do dostarczenia przez dostawce P2, podaz(2) = 31
Podaj liczbe towarow do dostarczenia przez dostawce P3, podaz(3) = 19
Podaj liczbe towarow do dostarczenia przez dostawce P4, podaz(4) = 49
Podaj liczbe towarow do dostarczenia przez dostawce P5, podaz(5) = 40
Podaj liczbe towarow do dostarczenia przez dostawce P6, podaz(6) = 37
Podaj liczbe towarow do odebrania przez odbiorce S1, popyt(1) = 18
Podaj liczbe towarow do odebrania przez odbiorce S2, popyt(2) = 29
Podaj liczbe towarow do odebrania przez odbiorce S3, popyt(3) = 15
Podaj liczbe towarow do odebrania przez odbiorce S4, popyt(4) = 34
Podaj liczbe towarow do odebrania przez odbiorce S5, popyt(5) = 26
Podaj liczbe towarow do odebrania przez odbiorce S6, popyt(6) = 21
Podaj liczbe towarow do odebrania przez odbiorce S7, popyt(7) = 36
Podaj liczbe towarow do odebrania przez odbiorce S8, popyt(8) = 21

```

Rysunek 4.11: Okno poleceń GNU Octave po wprowadzeniu wartości liczbowych.
(źródło: opracowanie własne)

Program wykorzystując metodę kąta północno-zachodniego, w pierwszym kroku dokonuje porównania a następnie wyboru mniejszej spośród wartości podaży i popytu odpowiadających pierwszej komórce lewego narożnika macierzy kosztów. W odniesieniu do pierwszej komórki podaży przyjmuje wartość 24, natomiast popyt wynosi 18. Mniejszą wartością jest 18, w związku z czym program przypisał tę wartość pierwszej komórce górnego lewego rogu jednocześnie odejmując 18 od podaży i popytu. W kolejnym etapie program dokonuje sprawdzenia, która z wartości popytu lub podaży po zredukowaniu osiąga 0. Jeżeli popyt przyjmuje zerową wartość wówczas pozostałe komórki w rozpatrywanym wierszu zostają uzupełnione 0. W przypadku otrzymania wartości 0 w podaży konieczne byłoby uzupełnienie 0 pozostałych komórek w rozpatrywanej kolumnie. Postępując analogicznie w kolejnych krokach wyznaczono bazowe rozwiązanie dopuszczalne. Okno poleceń po wykonaniu kroku 1 oraz 13 załączono na Rysunku 4.12.

Octave3.4.3

METODA KATA POLNOCNO - ZACHODNIEGO (A)

Krok 1

6	31	19	49	40	37	
18	0	0	0	0	0	0
x	x	x	x	x	x	29
x	x	x	x	x	x	15
x	x	x	x	x	x	34
x	x	x	x	x	x	26
x	x	x	x	x	x	21
x	x	x	x	x	x	36
x	x	x	x	x	x	21

(a) Krok 1

Octave3.4.3

METODA KATA POLNOCNO - ZACHODNIEGO (A)

Krok 13

0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0
6	23	0	0	0	0	0
0	8	7	0	0	0	0
0	0	12	22	0	0	0
0	0	0	26	0	0	0
0	0	0	1	20	0	0
0	0	0	0	20	16	0
0	0	0	0	0	21	0

(b) Krok 13

Rysunek 4.12: Wyniki początkowych oraz końcowych obliczeń uzyskane przy wykorzystaniu metody kąta północno-zachodniego.

(źródło: opracowanie własne)

Jako podsumowanie działania programu w oknie poleceń wyświetlona zostaje również informacja dotycząca wartości funkcji celu, liczby elementów bazowych oraz degeneracji otrzymanego rozwiązania, co przedstawiono na Rysunku 4.13. Całkowity koszt transportu przy wykorzystaniu metody kąta północno-zachodniego wyniósł €165, 109.0.

```

Octave3.4.3 x + v - □ ×
Calkowity koszt dla metody (A) - kata polnocno-zachodniego wynosi 165109
Rozwiazanie dopuszczalne posiada 13 elementow bazowych
Rozwiazanie metoda kata polnocno-zachodniego jest rozwiazaniem zdegenerowanym

```

Rysunek 4.13: Podsumowanie obliczeń dla metody kąta północno–zachodniego.
(źródło: opracowanie własne)

W celu wyznaczenia rozwiązania dopuszczalnego za pomocą metody minimalnego elementu w wierszu, opracowany program komputerowy dokonuje porównania wartości kosztów transportu oraz odpowiadających im podaży i popytu rozpoczynając od wiersza pierwszego. Najniższy koszt w wierszu pierwszym stanowił element równy 545.0 o popycie na poziomie 18 i podaży równej 37. W kolejnym kroku zmniejszono o 18 zarówno podaży jak i popyt, co spowodowało zerową wartość popytu w wyniku czego pozostałe komórki pierwszego wiersza zostały uzupełnione zerami. W wyniku kolejnych iteracji programu wyznaczono bazowe rozwiązanie dopuszczalne zobrazowane na Rysunku 4.14.

```

Octave3.4.3 x + v - □ ×
METODA MINIMALNEGO KOSZTU W WIERSZU(B)

Krok 1
| 24 | 31 | 19 | 49 | 40 | 19
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 | 0
| x | x | x | x | x | x | 29
| x | x | x | x | x | x | 15
| x | x | x | x | x | x | 34
| x | x | x | x | x | x | 26
| x | x | x | x | x | x | 21
| x | x | x | x | x | x | 36
| x | x | x | x | x | x | 21

```

(a) Krok 1

```

Octave3.4.3 x + v - □ ×

Krok 13
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 | 0
| 0 | 10 | 19 | 0 | 0 | 0 | 0
| 0 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0
| 0 | 6 | 0 | 28 | 0 | 0 | 0
| 0 | 0 | 0 | 0 | 26 | 0 | 0
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0
| 0 | 0 | 0 | 21 | 14 | 1 | 0
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 | 0

```

(b) Krok 13

Rysunek 4.14: Wyniki początkowych oraz końcowych obliczeń uzyskane przy wykorzystaniu metody minimalnego elementu w wierszu.
(źródło: opracowanie własne)

Na Rysunku 4.15 przedstawiono podsumowanie działania programu dla metody najmniejszego elementu w wierszu. Wartość funkcji celu wyznaczona za pomocą metody naj-

mniejszego elementu w wierszu była niższa od wartości uzyskanej przy zastosowaniu metody kąta północno-zachodniego. Całkowity koszt transportu przy zastosowaniu metody najmniejszego elementu w wierszu wyniósł €119,478.0.

```

Octave3.4.3
-----
Całkowity koszt dla metody (B) minimalnego kosztu w wierszu 119478
Rozwiązanie dopuszczalne posiada 13 elementów bazowych
Rozwiązanie metoda minimalnego kosztu jest rozwiązaniem zdegenerowanym
  
```

Rysunek 4.15: Podsumowanie obliczeń dla metody najmniejszego elementu w wierszu.
(źródło: opracowanie własne)

Mając na uwadze wyznaczenie rozwiązania dopuszczalnego metodą minimalnego elementu w macierzy, pierwszy krok działania opracowanego programu polega na dokonaniu wyboru najmniejszej spośród wszystkich wartości macierzy kosztów. W rozpatrywanym problemie minimalnemu elementowi równemu 156.0 odpowiada popyt na poziomie 15 oraz podaż równa 19. W kolejnym kroku zarówno podaż, jak i popyt, pomniejszono o 15 uzyskując wartość 0 dla popytu w konsekwencji czego pozostałe komórki wiersza trzeciego uzupełniono zerami. W wyniku działania kolejnych iteracji programu wyznaczono bazowe rozwiązanie dopuszczalne zobrazowane na Rysunku 4.16.

```

Octave3.4.3
-----
METODA MINIMALNEGO KOSZTU W MACIERZY(B)

Krok 1
| 24 | 31 | 4 | 49 | 40 | 37
| x | x | x | x | x | x | 18
| x | x | x | x | x | x | 29
| 0 | 0 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0
| x | x | x | x | x | x | 34
| x | x | x | x | x | x | 26
| x | x | x | x | x | x | 21
| x | x | x | x | x | x | 36
| x | x | x | x | x | x | 21
  
```

(a) Krok 1

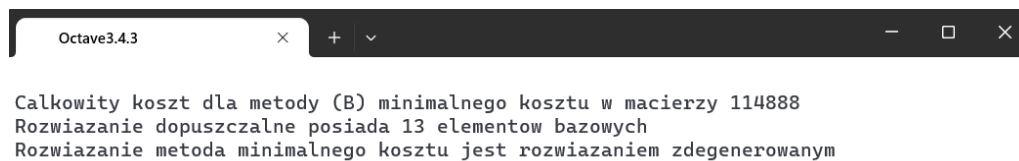
```

Octave3.4.3
-----
Krok 13
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 | 0
| 3 | 0 | 4 | 0 | 3 | 19 | 0
| 0 | 0 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0
| 0 | 31 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0
| 0 | 0 | 0 | 0 | 26 | 0 | 0
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0
| 0 | 0 | 0 | 36 | 0 | 0 | 0
| 0 | 0 | 0 | 10 | 11 | 0 | 0
  
```

(b) Krok 13

Rysunek 4.16: Wyniki początkowych oraz końcowych obliczeń uzyskane przy wykorzystaniu metody minimalnego elementu w macierzy.
(źródło: opracowanie własne)

Jako rezultat przeprowadzonych obliczeń wyznaczono rozwiązanie zdegenerowane, dla którego całkowity koszt transportu przy zastosowaniu metody minimalnego elementu w macierzy wyniósł €114,888.0, co potwierdza informacja zawarta na Rysunku 4.17.



Rysunek 4.17: Podsumowanie obliczeń dla metody najmniejszego elementu w macierzy.
(źródło: opracowanie własne)

W celu wyznaczenia bazowego rozwiązania dopuszczalnego rozpatrywanego problemu, w opracowanym skrypcie opublikowanym w artykule [4] wykorzystano również metodę VAM. W wyniku działania programu wyznaczono bazowe rozwiązanie dopuszczalne przedstawione na Rysunku 4.18.

METODA VAM (C)							
Krok 1							
	24	31	4	49	40	37	
x	x	x	x	x	x	x	18
x	x	x	x	x	x	x	29
0	0	15	0	0	0	0	0
x	x	x	x	x	x	x	34
x	x	x	x	x	x	x	26
x	x	x	x	x	x	x	21
x	x	x	x	x	x	x	36
x	x	x	x	x	x	x	21

(a) Krok 1

METODA VAM (C)							
Krok 13							
	24	31	4	49	40	37	
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	18	0
15	10	4	0	0	0	0	0
0	0	15	0	0	0	0	0
0	0	0	13	21	0	0	0
0	0	0	0	19	7	0	0
9	0	0	0	0	12	0	0
0	0	0	36	0	0	0	0
0	21	0	0	0	0	0	0

(b) Krok 13

Rysunek 4.18: Wyniki początkowych oraz końcowych obliczeń uzyskane przy wykorzystaniu metody VAM.

(źródło: opracowanie własne)

Na Rysunku 4.19 zobrazowano rezultat działania programu dla metody VAM. Całkowity koszt transportu, wyznaczony za pomocą metody VAM, wyniósł €102,152.0.

```
Octave3.4.3
Całkowity koszt dla metody (C) VAM 102152
Rozwiązanie dopuszczalne posiada 13 elementów bazowych
Rozwiązanie metoda VAM jest rozwiązaniem zdegenerowanym
```

Rysunek 4.19: Podsumowanie obliczeń dla metody VAM.

(źródło: opracowanie własne)

Zaproponowany kod źródłowy umożliwia również porównanie liczby iteracji, wartości funkcji celu oraz degeneracji otrzymanego rozwiązania, co przedstawiono na Rysunku 4.20.

```
Octave3.4.3
POROWNANIE METOD ROZWIĄZANIA PROBLEMU TRANSPORTOWEGO

Najmniejsza liczba kroków otrzymano dla metody:
- kąta północno-zachodniego,
- minimalnego elementu w macierzy,
- minimalnego elementu w wierszu,
- VAM,

Najlepsze rozwiązanie otrzymano dla metody:
- VAM,

Tabela. Porównanie metod

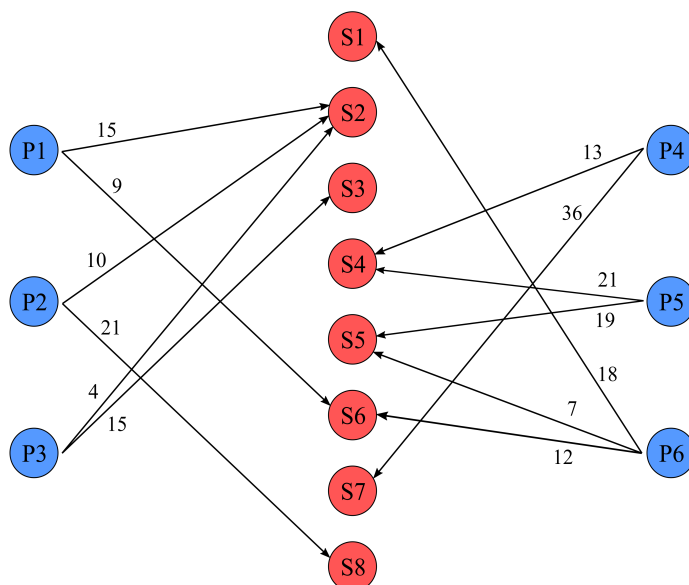
METODA      | NW   | MK   | MKW  | VAM  |
Liczba kroków | 14   | 14   | 14   | 14   |
Rozwiązanie  | 165109 | 114888 | 119478 | 102152 |
Zdegenerowane | TAK  | TAK  | TAK  | TAK  |

NW - metoda kąta północno-zachodniego
MK - metoda minimalnego elementu w macierzy
MKW - metoda minimalnego elementu w wierszu
VAM - metoda VAM
```

Rysunek 4.20: Porównanie wyników przeprowadzonych obliczeń.

(źródło: opracowanie własne)

Dokonując porównania początkowych wartości rozwiązań bazowych rozpatrywanego problemu transportowego należy zauważyć, że w zależności od zastosowanej metody otrzymano różne wartości funkcji celu, zatem różne rozwiązania. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że najwyższy koszt transportu wyznaczono przy wykorzystaniu metody kąta północno-zachodniego, natomiast metoda najmniejszego elementu w macierzy doprowadziła do uzyskania niższej wartości kosztu transportu, niż metoda najmniejszego elementu w wierszu. Najmniejszą wartość funkcji celu uzyskano za pomocą metody VAM. W każdej z zaprezentowanych metod został spełniony warunek konieczny dotyczący zdegenerowania rozwiązania dopuszczalnego. Bazowe rozwiązanie dopuszczalne zapewniające najniższy koszt transportu w ramach rozpatrywanej sieci dystrybucji zaprezentowano na Rysunku 4.21.



Rysunek 4.21: Bazowe rozwiązanie dopuszczalne zapewniające najniższy koszt transportu.
(źródło: [4])

W celu sprawdzenia optymalności poszczególnych bazowych rozwiązań dopuszczalnych wykorzystano metodę potencjałów. Bazując na zestawie danych wejściowych oraz bazowym rozwiązaniu dopuszczalnym wyznaczonym przy wykorzystaniu metody kąta północno-zachodniego w pierwszej kolejności przygotowano tabelę na wyniki w taki sposób, aby komórki odpowiadające wartościom podaży i popytu pozostały puste. Następnie uzupełniono koszty transportu w polach stanowiących elementy bazowe. Przyjęto założenie, że wartość potencjału $Y_1 = 0$. W kolejnym kroku odnaleziono koszt odpowiadający temu potencjałowi, a następnie wyznaczono wartość potencjału X_1 będącego różnicą kosztu transportu i potencjału Y_1 . W rozpatrywanym problemie otrzymano następujące wartości $X_1 = 736 - Y_1 = 736$. Następnie konieczne było odnalezienie w kolumnie odpowiadającej X_1 kolejnego kosztu oraz wyznaczenie wartości Y_2 . Potencjał Y_2 odpowiadający wyznaczonemu kosztowi obliczono jako różnicę pomiędzy kosztem 1011 i potencjałem X_1 . W celu wyznaczenia tzw. kosztów pośrednich stanowiących kolejne wartości potencjałów powtórzono opisany schemat postępowania. Pozostałe pola uzupełniono sumami potencjałów $X_t + Y_u$, gdzie $t = 1, \dots, n$ natomiast $u = 1, \dots, m$, pamiętając, że n oznacza liczbę odbiorców, zaś m liczbę dostawców (3.1.1). Wyniki zastosowanych przekształceń przedstawiono w Tabeli 4.5.

Tabela 4.5. Zestawienie kosztów pośrednich i kosztów transportu w rozpatrywanej sieci dystrybucji.

Koszty pośrednie						
$X_1 =$ 736	$X_2 =$ 399	$X_3 =$ -236	$X_4 =$ -521	$X_5 =$ -936	$X_6 =$ -236	
736	399	-236	-521	-936	-236	$Y_1 =$ 0
1011	674	39	-246	-661	39	$Y_2 =$ 275
1128	791	156	-130	-545	156	$Y_3 =$ 392
1854	1517	882	596	182	882	$Y_4 =$ 1118
1932	1595	960	674	259	960	$Y_5 =$ 1196
2788	2451	1815	1530	1115	1815	$Y_6 =$ 2051
2165	1828	1193	908	493	1193	$Y_7 =$ 1429
2347	2010	1375	1089	674	1375	$Y_8 =$ 1611
Koszty transportu						
736	1400	1647	1504	1063	545	
1011	674	197	1556	1478	1400	
1349	791	156	1608	1530	1660	
1271	267	882	596	648	908	
1193	337	1037	674	622	700	
545	648	895	1530	1115	674	
1712	726	1219	156	493	1193	
1764	506	415	1089	1245	1375	

W kolejnym kroku wyznaczono wskaźniki optymalności, rozumiane jako różnica pomiędzy kosztami pośrednimi oraz kosztami transportu wynikającymi z rozpatrywanej sieci dystrybucji. Otrzymane wyniki zestawiono w Tabeli 4.6.

Tabela 4.6. Wartości wskaźników optymalności dla bazowego rozwiązania dopuszczalnego wyznaczonego metodą kąta północno-zachodniego.

$X_1 =$ 736	$X_2 =$ 399	$X_3 =$ -236	$X_4 =$ -521	$X_5 =$ -936	$X_6 =$ -236	
0	-1001	-1883	-2025	-2000	-781	$Y_1 =$ 0
0	0	-158	-1802	-2140	-1362	$Y_2 =$ 275
-220	0	0	-1738	-2075	-1504	$Y_3 =$ 392
584	1250	0	0	-467	-26	$Y_4 =$ 1118
739	1258	-78	0	-363	259	$Y_5 =$ 1196
2243	1802	921	0	0	1141	$Y_6 =$ 2051
454	1102	-26	752	0	0	$Y_7 =$ 1429
584	1504	960	0	-571	0	$Y_8 =$ 1611

Wśród obliczonych wskaźników wystąpiły liczby dodatnie co oznacza, że bazowe rozwiązanie dopuszczalne wyznaczone metodą kąta północno-zachodniego nie jest optymalne. W celu uzyskania nowego rozwiązania o niższym koszcie transportu konieczne jest wyznaczenie cyklu. Pierwszy element cyklu dodatniego odpowiada maksymalnemu wskaźnikowi optymalności. W wierszu zawierającym element cyklu dodatniego należy wskazać taki składnik, który będzie miał odpowiednik w kolumnie. Procedurę należy powtórzyć do momentu zamknięcia cyklu. Następnie należy odnaleźć najmniejszą wartość spośród elementów cyklu ujemnego i odjąć tę wartość od wszystkich elementów cyklu ujemnego oraz dodać do

wszystkich elementów cyklu dodatniego. W Tabeli 4.7 przedstawiono skonstruowany cykl oraz nowe rozwiązanie dopuszczalne.

Tabela 4.7. Wyznaczony cykl oraz nowe rozwiązanie dopuszczalne.

Cykl						Nowe rozwiązanie dopuszczalne					
18	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0
6(-)	23(+)	0	0	0	0	5	24	0	0	0	0
0	8(-)	7(+)	0	0	0	0	7	8	0	0	0
0	0	12(-)	22(+)	0	0	0	0	11	23	0	0
0	0	0	26	0	0	0	0	0	26	0	0
0(+)	0	0	1(-)	20	0	1	0	0	0	20	0
0	0	0	0	20	16	0	0	0	0	20	16
0	0	0	0	0	21	0	0	0	0	0	21

Koszt dla nowego rozwiązania wyniósł €162,883.0, a więc jest niższy od kosztu wyznaczonego dla bazowego rozwiązania dopuszczalnego co oznacza, że nowe rozwiązanie jest lepsze. W przypadku metody kąta północno-zachodniego powtarzając dwunastokrotnie opisaną procedurę uzyskano nowe rozwiązanie dopuszczalne oraz wskaźniki optymalności, które zaprezentowano w Tabeli 4.8.

Tabela 4.8. Nowe rozwiązanie dopuszczalne oraz wskaźniki optymalności.

Nowe rozwiązanie dopuszczalne						Wskaźniki optymalności					
0	0	0	0	0	18	-1463	-6018	-9310	-4956	-2714	0
15	10	4	0	0	0	0	0	0	-2478	-1888	-1180
0	0	15	0	0	0	-1723	-720	0	-2903	-2313	-2549
0	0	0	13	21	0	-3068	-35	-5003	0	0	-826
0	0	0	0	19	7	-2832	-472	-5829	-472	0	0
9	0	0	0	0	12	0	-2006	-5298	-4484	-2360	0
0	0	0	36	0	0	-7080	-4130	-8543	0	-1298	-4130
0	21	0	0	0	0	-4189	0	-1758	-3009	-3717	-4307

Wszystkie wartości wskaźników optymalności są mniejsze lub równe 0 zatem otrzymane rozwiązanie wynoszące €102,152.0 jest optymalne. W Tabeli 4.9 zestawiono końcowe koszty transportu oraz rezultat zastosowania metody potencjałów prowadzącej do wyznaczenia rozwiązania optymalnego.

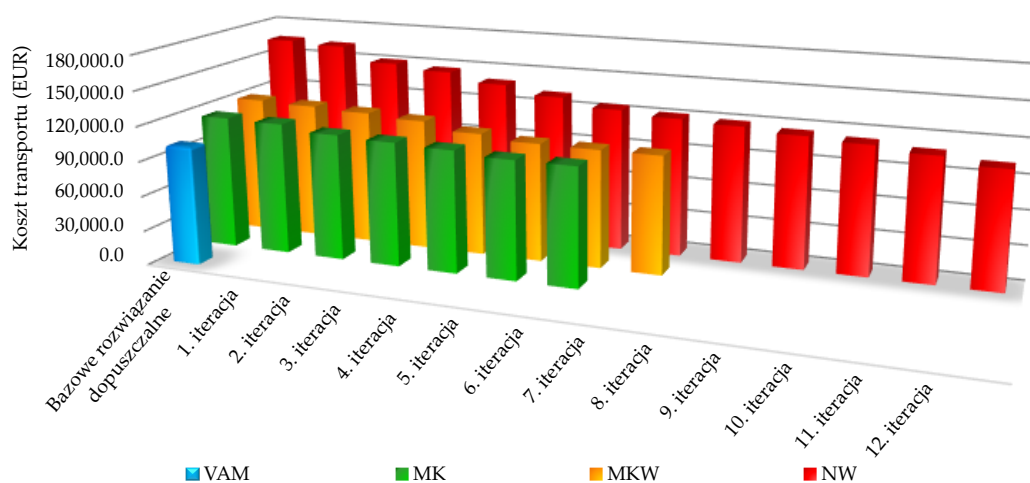
Procedurę postępowania w celu sprawdzenia optymalności poszczególnych rozwiązań dopuszczalnych powtórzono:

- dwunastokrotnie w przypadku metody kąta północno-zachodniego,
- siedmiokrotnie w przypadku metody najmniejszego elementu w wierszu,
- sześciokrotnie w przypadku metody najmniejszego elementu w macierzy,
- jednokrotnie w przypadku metody VAM.

Tabela 4.9. Porównanie kosztów (€) otrzymanych rozwiązań w zależności od zastosowanych metod.

Metoda	NW	MKW	MK	VAM
Bazowe rozwiązanie dopuszczalne	165,109.0	119,478.0	114,888.0	102,152.0
1. iteracja metody potencjałów	162,866.0	118,060.0	113,931.0	
2. iteracja metody potencjałów	150,356.0	116,218.0	108,991.0	
3. iteracja metody potencjałów	146,232.0	113,397.0	107,213.0	
4. iteracja metody potencjałów	138,616.0	106,665.0	105,503.0	
5. iteracja metody potencjałów	131,311.0	102,675.0	102,201.0	
6. iteracja metody potencjałów	124,333.0	102,201.0	102,152.0	
7. iteracja metody potencjałów	120,769.0	102,152.0		
8. iteracja metody potencjałów	118,600.0			
9. iteracja metody potencjałów	115,072.0			
10. iteracja metody potencjałów	112,349.0			
11. iteracja metody potencjałów	108,137.0			
12. iteracja metody potencjałów	102,152.0			

Koszty transportu dla wyznaczonych bazowych rozwiązań dopuszczalnych oraz poszczególnych iteracji metody potencjałów zobrazowano na Rysunku 4.22.



Rysunek 4.22: Rezultat zastosowania metody potencjałów.

(źródło: opracowanie własne)

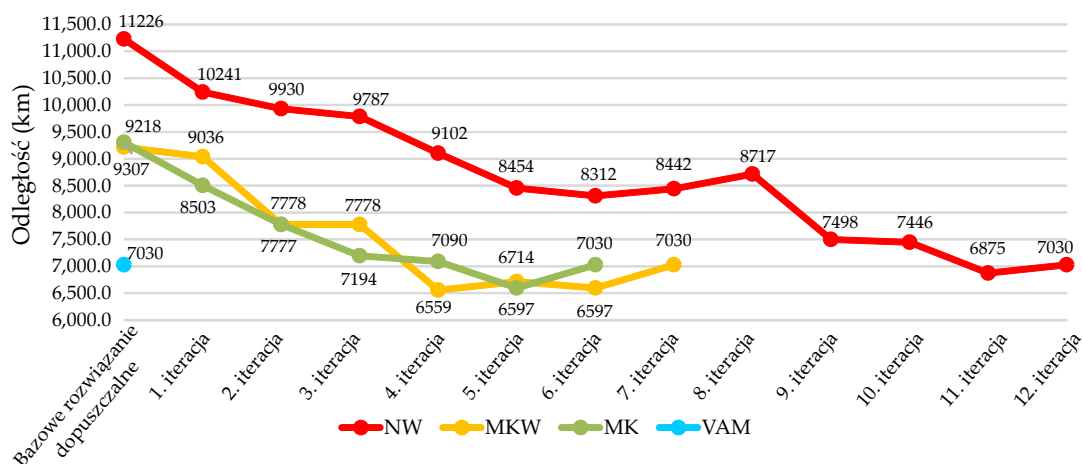
Rozwój systemu transportowego istotnie wpływa na rozwój społeczno-gospodarczy współczesnego świata. Koncepcja zrównoważonego rozwoju transportu uwzględnia nie tylko kryteria ekonomiczne i społeczne, ale również środowiskowe. Należy pamiętać, że pomimo znaczącej roli systemu transportowego w rozwoju gospodarki, transport wywiera negatywne skutki dla jakości życia i zdrowia ludzi, a także dla środowiska naturalnego poprzez znaczący udział w emisji gazów cieplarnianych. Współpraca międzynarodowa nie może ograniczyć się wyłącznie do rozbudowania sieci transportowej, ale musi również uwzględnić ochronę środowiska. Zrównoważony rozwój transportu oraz ochrona środowiska naturalnego są związane z kształtowaniem proekologicznego systemu transportowego. Zgodnie z Eu-

ropean Green Deal Communication [126] państwa członkowskie Unii Europejskiej (UE) zobowiązały się do ograniczenia emisji gazów cieplarnianych o co najmniej 55% do 2030 roku w stosunku do poziomów z 1990 roku. W ramach rozwoju rynku pojazdów niskoemisyjnych i bezemisyjnych Komisja Europejska w zakresie redukcji emisji CO₂ w nowo wyprodukowanych pojazdach osobowych i dostawczych przyjęła następujące cele: ograniczenie o 55% emisji CO₂ z aut osobowych oraz o 50% emisji CO₂ z aut dostawczych do 2030 roku, zero emisji CO₂ z nowych aut osobowych do 2035 roku. W odniesieniu do nowych pojazdów ciężarowych za cel przyjęto zmniejszenie emisji CO₂ średnio o 15% od 2025 roku i o 30% od 2030 roku w stosunku do poziomów z roku 2019. Emisje CO₂ z pojazdów ciężarowych, autobusów i autokarów obecnie stanowią 6% całkowitej emisji CO₂ w UE i 27% całkowitej emisji CO₂ w transporcie drogowym [127]. W związku z tym, niezbędne jest wdrażanie proekologicznej polityki transportowej. W Tabeli 4.10 zobrazowano całkowitą długość przebytej trasy w zależności od kolejnych rozwiązań otrzymanych metodą potencjałów.

Tabela 4.10. Długość przebytej trasy (km) w zależności od otrzymanego rozwiązania.

Metoda	NW	MKW	MK	VAM
Bazowe rozwiązanie dopuszczalne	11,226.0	9218.0	9307.0	7030.0
1. iteracja metody potencjałów	10,241.0	9036.0	8503.0	
2. iteracja metody potencjałów	9930.0	7778.0	7777.0	
3. iteracja metody potencjałów	9787.0	7778.0	7194.0	
4. iteracja metody potencjałów	9102.0	6559.0	7090.0	
5. iteracja metody potencjałów	8454.0	6714.0	6597.0	
6. iteracja metody potencjałów	8312.0	6597.0	7030.0	
7. iteracja metody potencjałów	8442.0	7030.0		
8. iteracja metody potencjałów	8717.0			
9. iteracja metody potencjałów	7498.0			
10. iteracja metody potencjałów	7446.0			
11. iteracja metody potencjałów	6875.0			
12. iteracja metody potencjałów	7030.0			

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że bazowe rozwiązanie dopuszczalne wyznaczone za pomocą metody kąta północno-zachodniego wymaga pokonania najdłuższej trasy równej 11226 (km). Należy również zauważyć, że rozwiązanie optymalne pod względem kosztu transportu wyznaczone metodą kąta północno-zachodniego nie jest optymalne pod względem całkowitej długości trasy. W przypadku metody najmniejszego elementu w macierzy najkrótszą odległość zapewniającą realizację zadania transportowego równą 6597 (km) otrzymano w wyniku piątej iteracji metody potencjałów. Spośród wszystkich rozpatrywanych metod najkrótsza trasa równa 6559 (km) odpowiada czwartej iteracji metody potencjałów zastosowanej dla bazowego rozwiązania dopuszczalnego wyznaczonego w oparciu o metodę najmniejszego elementu w wierszu. Graficzną interpretację otrzymanych wyników obliczeń zobrazowano na Rysunku 4.23.



Rysunek 4.23: Przebyta odległość w zależności od poszczególnych rozwiązań uzyskanych za pomocą metody potencjałów.
(źródło: opracowanie własne)

Wartości całkowitego zużycia paliwa oraz emisji CO₂ w zależności od długości przebytej trasy zestawiono w Tabeli 4.11 oraz w Tabeli 4.12. W celu ich obliczenia wykorzystano Vehicle Energy Consumption Calculation Tool (VECTO version 3.3.9.2175) [128].

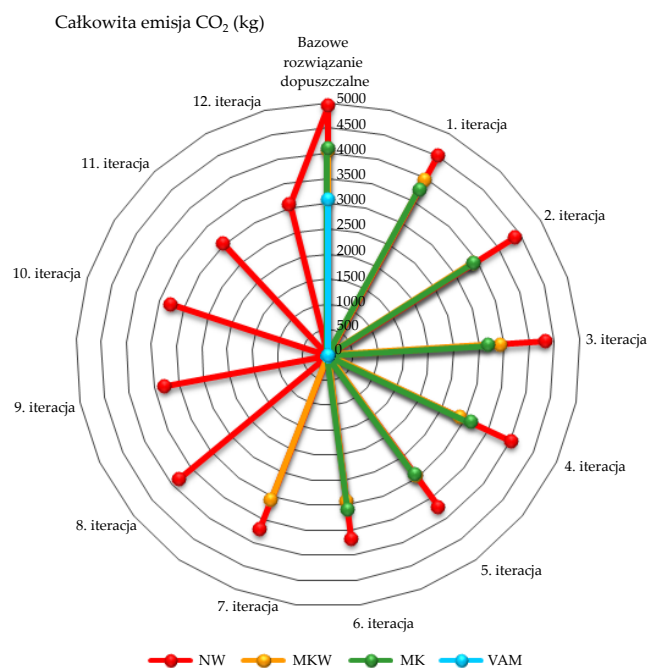
Tabela 4.11. Całkowite zużycie paliwa (l) w zależności od długości przebytej trasy.

Metoda	Zużycie paliwa (l)			
	NW	MKW	MK	VAM
Bazowe rozwiązanie dopuszczalne	3143.3	2581.0	2606.6	1968.4
1. iteracja metody potencjałów	2867.5	2530.1	2380.8	
2. iteracja metody potencjałów	2780.4	2177.8	2177.6	
3. iteracja metody potencjałów	2740.4	2177.8	2014.3	
4. iteracja metody potencjałów	2548.6	1836.5	1985.2	
5. iteracja metody potencjałów	2367.1	1879.9	1847.2	
6. iteracja metody potencjałów	2327.4	1847.2	1968.4	
7. iteracja metody potencjałów	2363.8	1968.4		
8. iteracja metody potencjałów	2440.8			
9. iteracja metody potencjałów	2099.4			
10. iteracja metody potencjałów	2084.9			
11. iteracja metody potencjałów	1925.0			
12. iteracja metody potencjałów	1968.4			

Tabela 4.12. Całkowita emisja CO₂ (kg) w zależności od długości przebytej trasy.

Metoda	Emisja CO ₂ (kg)			
	NW	MKW	MK	VAM
Bazowe rozwiązanie dopuszczalne	4939.4	4055.9	4095.1	3093.2
1. iteracja metody potencjałów	4506.0	3975.8	3741.3	
2. iteracja metody potencjałów	4369.2	3422.3	3421.9	
3. iteracja metody potencjałów	4306.3	3422.3	3165.4	
4. iteracja metody potencjałów	4004.9	2886.0	3119.6	
5. iteracja metody potencjałów	3719.8	2954.2	2902.7	
6. iteracja metody potencjałów	3657.3	2902.7	3093.2	
7. iteracja metody potencjałów	3714.5	3093.2		
8. iteracja metody potencjałów	3835.5			
9. iteracja metody potencjałów	3299.1			
10. iteracja metody potencjałów	3276.2			
11. iteracja metody potencjałów	3025.0			
12. iteracja metody potencjałów	3093.2			

Realizacja planu przewozowego zgodnie z bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym wyznaczonym metodą kąta północno-zachodniego wiąże się z najwyższą emisyjnością CO₂ równą 4939.4 (kg). Z punktu widzenia ochrony środowiska naturalnego, optymalne rozwiązanie zapewniające najniższą emisję CO₂ równą 2886.0 (kg) otrzymano dla metody najmniejszego elementu w wierszu w wyniku czterokrotnego zastosowania metody potencjałów. Należy podkreślić, że wyznaczone w ten sposób rozwiązanie prowadzi do zmniejszenia całkowitej emisji CO₂ aż o 2053.5 (kg). Wyniki przeprowadzonych obliczeń przedstawiono na Rysunku 4.24.



Rysunek 4.24: Emisja CO₂ w zależności od otrzymanego rozwiązania.

(źródło: opracowanie własne)

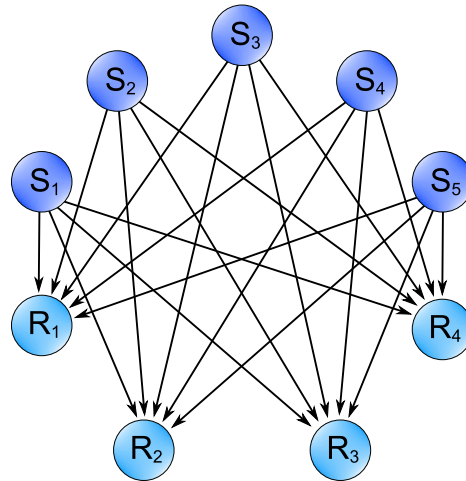
4.3. Metoda ustalania strategii postępowania umożliwiającej optymalizację kosztów transportu w ramach sieci dostaw w oparciu o nowoczesne środowiska informatyczne

Kontynuację wcześniejszych obliczeń i analiz stanowił trzeci etap badań polegający na opracowaniu narzędzi informatycznych w postaci skryptów zaimplementowanych w Matlab (wersja R2020b), GNU Octave (wersja 3.4.3) oraz R (wersja 2022.07.0), umożliwiających wyznaczenie rozwiązania optymalnego zagadnienia transportowego oraz porównanie złożoności obliczeniowej, rozumianej jako czas niezbędny do przeprowadzenia obliczeń. Szczegółowe wyniki przeprowadzonych analiz opisano w artykule [6] będącym elementem cyklu publikacji niniejszej dysertacji. Z przeprowadzonego przeglądu literatury wynika, że o ile zastosowanie środowisk informatycznych oraz języków programowania w celu rozwiązywania problemów transportowych było przedmiotem licznych badań, jednakże w większości publikacji niezbędna była umiejętność programowania, znajomość dostępnych funkcji oraz biegłość w ich używaniu. Zaproponowane narzędzia mogą być z łatwością zaimplementowane przez użytkowników nie znających technik programistycznych, gdyż wymagają wyłącznie prawidłowego wprowadzenia danych dotyczących rozpatrywanego problemu. W Tabeli 4.13 zestawiono rzeczywiste dane liczbowe zaczerpnięte z Rozkazu Szefa Inspektoratu Wsparcia Sił Zbrojnych z dnia 19.02.2020 r. na podstawie których przeprowadzono obliczenia. Sieć dystrybucji rozpatrywanego problemu przedstawiono na Rysunku 4.25.

Tabela 4.13. Wartości liczbowe dotyczące rozpatrywanego zagadnienia transportowego.

		Dostawcy					
		S1	S2	S3	S4	S5	Popyt
Odbiorcy	R1	432	1715	1092	765	1104	46
	R2	858	2246	376	1357	1697	37
	R3	1209	2764	494	1968	2308	53
	R4	1450	938	1968	463	117	49
Podaż		36	29	23	42	55	

Postępując zgodnie z procedurami opisanymi w podrozdziałach 3.1.2 - 3.1.7 wyznaczono bazowe rozwiązania dopuszczalne, które zestawiono w Tabeli 4.14 oraz na Rysunkach 4.26 - 4.30. Ponieważ w każdej z metod spełniono warunek dotyczący liczby elementów bazowych, w związku z czym wyznaczone rozwiązania są zdegenerowane.

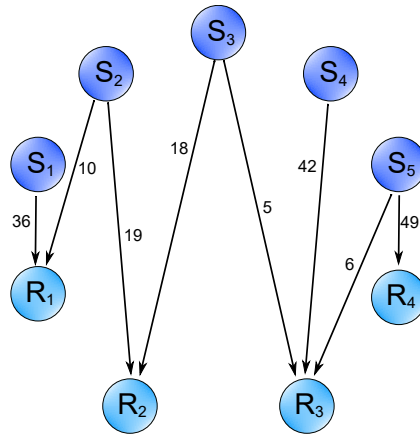


Rysunek 4.25: Sieć dystrybucji rozpatrywanego zagadnienia transportowego.
(źródło: [6])

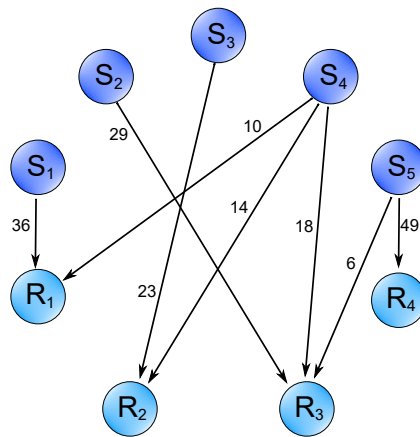
Tabela 4.14. Bazowe rozwiązania dopuszczalne.

		S1	S2	S3	S4	S5
Metoda kąta północno-zachodniego (NW)	R1	36	10	0	0	0
	R2	0	19	18	0	0
	R3	0	0	5	42	6
	R4	0	0	0	0	49
Metoda minimalnego elementu w macierzy (MK)	R1	36	0	0	10	0
	R2	0	0	23	14	0
	R3	0	29	0	18	6
	R4	0	0	0	0	49
Metoda VAM	R1	0	0	0	40	6
	R2	6	29	0	2	0
	R3	30	0	23	0	0
	R4	0	0	0	0	49
Metoda KSAM	R1	0	0	0	42	4
	R2	6	29	0	0	2
	R3	30	0	23	0	0
	R4	0	0	0	0	49
Metoda MDED	R1	0	0	0	42	4
	R2	6	29	0	0	2
	R3	30	0	23	0	0
	R4	0	0	0	0	49

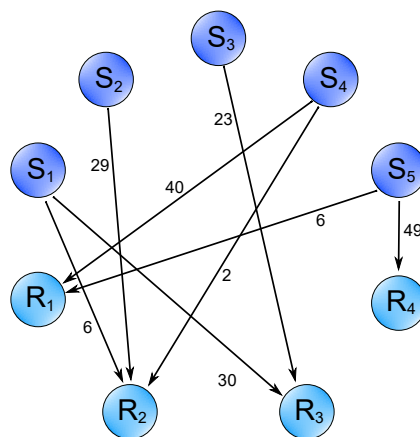
Koszty transportu odpowiadające bazowym rozwiązaniom dopuszczalnym oraz rezultat zastosowania metody potencjałów zestawiono w Tabeli 4.15.



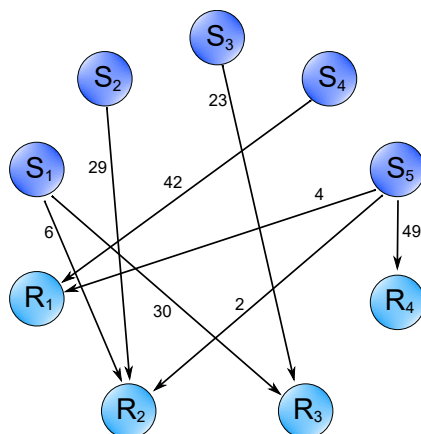
Rysunek 4.26: Metoda kąta północno-zachodniego.
(źródło: [6])



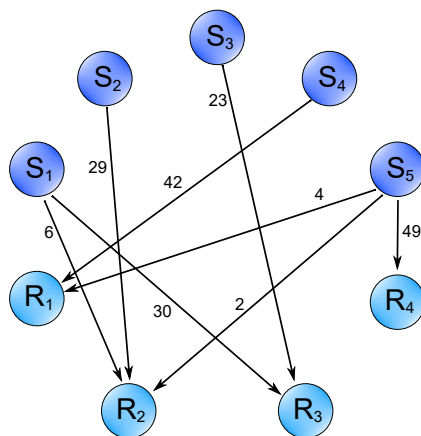
Rysunek 4.27: Metoda minimalnego elementu w macierzy.
(źródło: [6])



Rysunek 4.28: Metoda VAM.
(źródło: [6])



Rysunek 4.29: Metoda KSAM.
(źródło: [6])



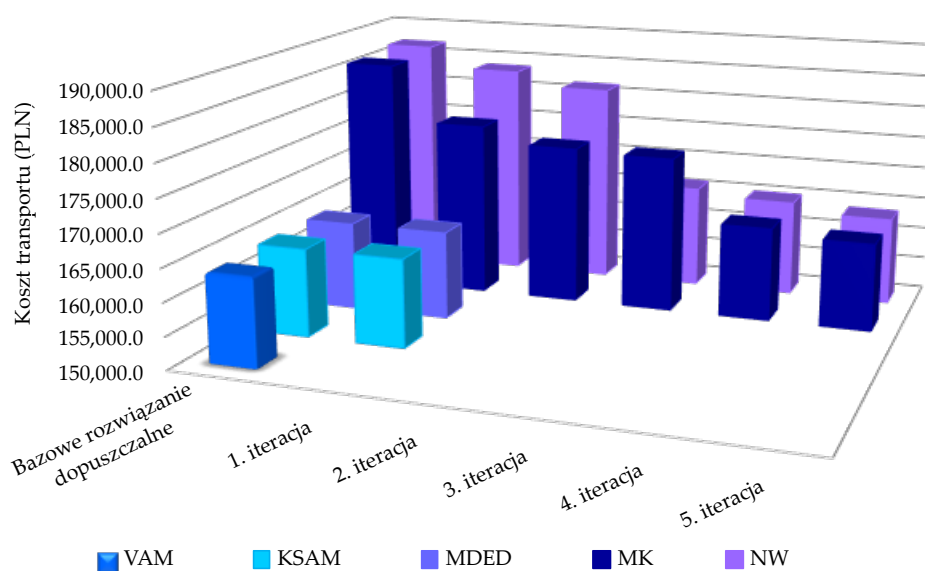
Rysunek 4.30: Metoda MDED.
(źródło: [6])

Tabela 4.15. Porównanie kosztów transportu (PLN) otrzymanych rozwiązań w zależności od zastosowanych metod.

	Metoda				
	NW	MK	VAM	KSAM	MDED
Bazowe rozwiązanie dopuszczalne	186,851.0	186,009.0	163,585.0	163,587.0	163,587.0
1. iteracja metody potencjałów	183,521.0	177,135.0		163,585.0	163,585.0
2. iteracja metody potencjałów	181,305.0	174,665.0			
3. iteracja metody potencjałów	165,969.0	174,238.0			
4. iteracja metody potencjałów	164,983.0	164,581.0			
5. iteracja metody potencjałów	163,585.0	163,585.0			

Dokonując porównania otrzymanych wyników należy zauważyć, że w zależności od wybranej metody, wartości funkcji celu dla poszczególnych rozwiązań dopuszczalnych są

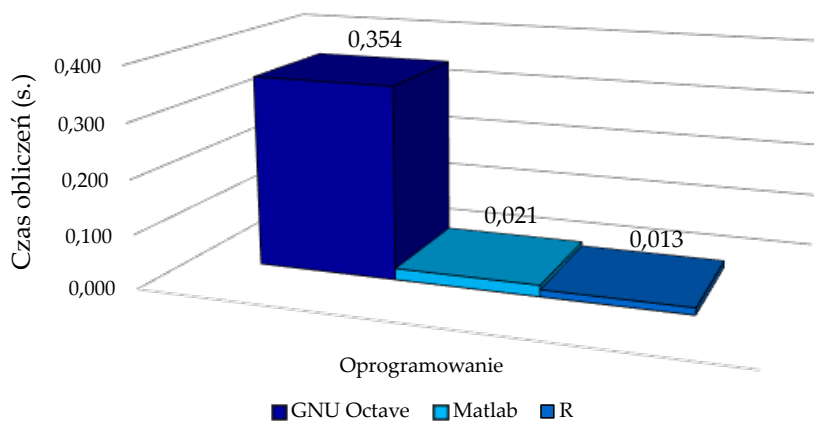
zróznicowane. Metoda kąta północno-zachodniego pomimo prostoty obliczeń jest najmniej dokładna, gdyż konieczne jest pięciokrotne stosowanie metody potencjałów. W metodzie minimalnego elementu w macierzy dla rozwiązania bazowego wyznaczono niższy koszt transportu niż za pomocą metody kąta północno-zachodniego, jednakże również w tym przypadku konieczna jest pięciokrotna optymalizacja rozwiązania dopuszczalnego. Metody KSAM oraz MDED zapewniają takie samo rozwiązanie dopuszczalne, które wymaga jednokrotnego zastosowania metody potencjałów. Jedynie metoda VAM zapewnia uzyskanie minimalnej wartości funkcji celu, a tym samym wyznaczenie optymalnego planu przewozu towaru od dostawców do odbiorców już w pierwszym kroku. Koszty transportu dla wyznaczonych bazowych rozwiązań dopuszczalnych oraz poszczególnych iteracji metody potencjałów zilustrowano na Rysunku 4.31.



Rysunek 4.31: Koszty transportu wyznaczone dla bazowych rozwiązań dopuszczalnych oraz poszczególnych iteracji metody potencjałów.

(źródło: opracowanie własne)

Opracowane na potrzeby badań kody programów umożliwiają porównanie złożoności obliczeniowej, rozumianej jako czas niezbędny do przeprowadzenia obliczeń. W tym celu, w przypadku oprogramowania Matlab i GNU Octave zastosowano funkcję `tic; toc`. Mając na uwadze wyznaczenie czasu obliczeń za pomocą R wykorzystano funkcję `sys.time`. Na Rysunku 4.32 zilustrowano całkowity czas obliczeń dla każdego z zastosowanych rozwiązań wykorzystujących oprogramowanie komputerowe. Najdłuższy czas obliczeń zapewniających wyznaczenie optymalnego rozwiązania rozpatrywanego problemu odnotowano przy zastosowaniu GNU Octave, natomiast najkrótszy czas obliczeń uzyskano za pomocą środowiska R.



Rysunek 4.32: Całkowity czas obliczeń w zależności od zastosowanego oprogramowania.
(źródło: opracowanie własne)

Zaproponowana metodyka postępowania umożliwi wyznaczenie rozwiązania optymalnego zagadnienia transportowego w bardzo krótkim czasie, co może mieć kluczowe znaczenie w sytuacji, gdy czas na podjęcie decyzji jest ograniczony.

4.4. Metoda wyznaczania strategii postępowania umożliwiającej optymalizację organizacji procesu naprawy sprzętu wojskowego z wykorzystaniem metody Blocha-Schmigalli

Metoda Blocha-Schmigalli nazywana również metodą trójkątów Schmigalli umożliwia organizację transportu, przepływu materiałów, informacji czy też osób, poprzez skracanie odległości pomiędzy punktami charakteryzującymi się największą intensywnością ruchu. W systemie logistycznym głównym celem rozmieszczenia punktów nadania/odbioru, stanowisk roboczych, obiektów itp. jest usprawnienie przepływu dóbr. Metoda Blocha-Schmigalli przeznaczona jest do przestrzennego rozmieszczenia tych punktów w taki sposób, aby punkty, pomiędzy którymi następuje największy przepływ danego materiału zostały usytuowane jak najbliżej siebie. Na potrzeby niniejszej rozprawy doktorskiej opracowano strategię postępowania umożliwiającą optymalizację organizacji procesu naprawy sprzętu wojskowego z wykorzystaniem metody Blocha-Schmigalli. W celu optymalnego rozlokowania stanowisk naprawczych skonstruowano model matematyczny, w którym funkcję celu stanowi iloczyn wielkości przepływu uszkodzonego sprzętu wojskowego i odległości jego przemieszczenia. W wyniku przeprowadzonych obliczeń wyznaczono optymalny sposób rozmieszczenia stanowisk naprawczych na przykładzie bezzałogowych platform lądowych, zapewniający takie zagospodarowanie przestrzeni, aby praca przebiegała w sposób ciągły, sprawny oraz aby stanowiska naprawcze charakteryzujące się największym powiązaniem technologicznym zo-

stały zlokalizowane jak najbliżej siebie. Wyniki obliczeń i analiz opisano w publikacji [3] będącej podstawą niniejszej dysertacji. W skonstruowanym modelu matematycznym przyjęto następujące oznaczenia:

$n \in \mathbb{N}_+$ - liczba rozmieszczonych obiektów,

S_{ij} - powiązania pomiędzy i -tym oraz j -tym obiektem,

L_{ij} - odległość (mierzona w przyjętych jednostkach modułowych) pomiędzy i -tym oraz j -tym obiektem.

Funkcję celu można wyrazić za pomocą wzoru (4.3):

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n S_{ij} L_{ij}. \quad (4.3)$$

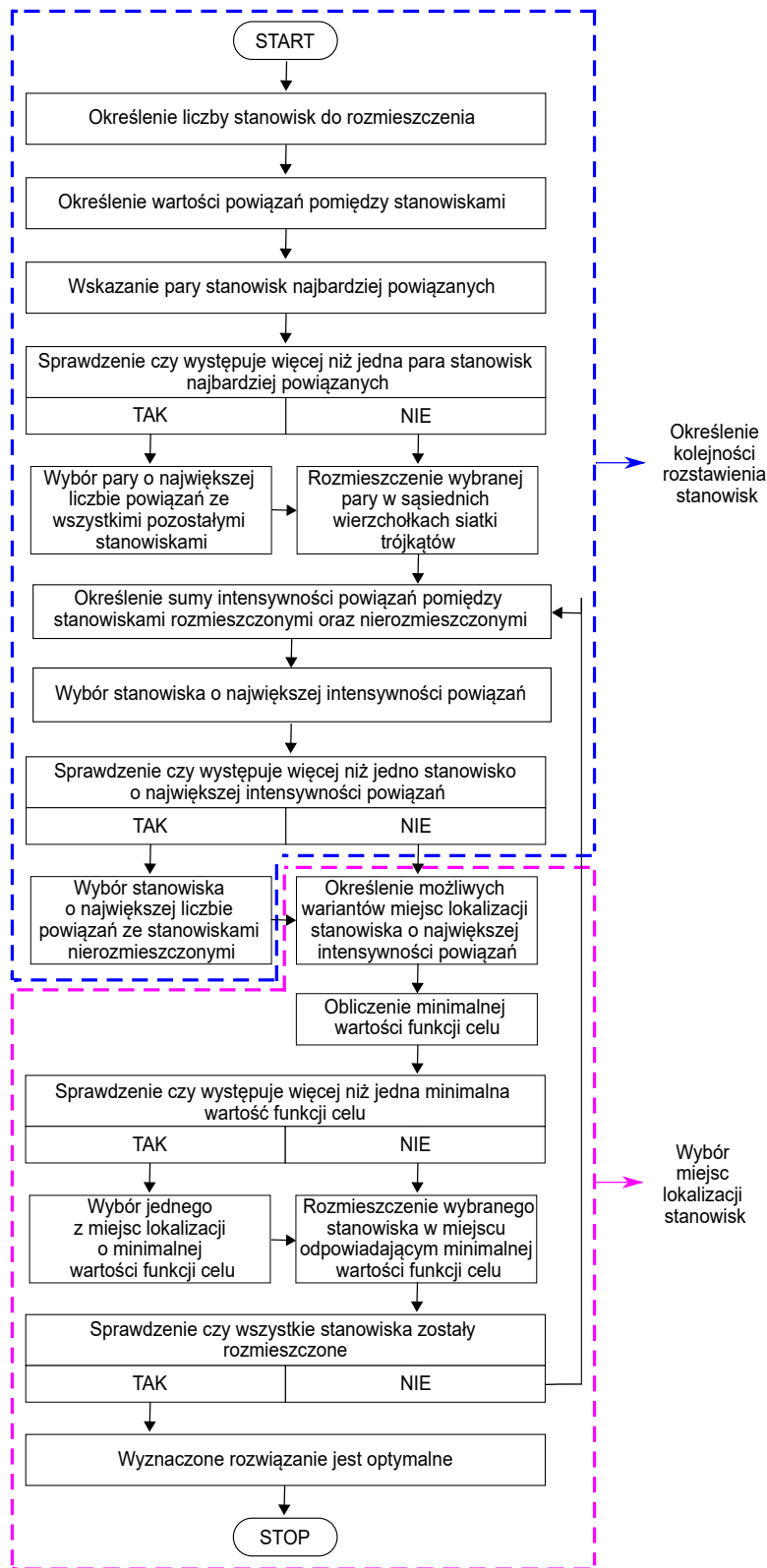
Proces obliczeń w metodzie Blocha-Schmigalli polega na:

- określeniu kolejności rozstawienia poszczególnych stanowisk,
- dokonaniu wyboru miejsc lokalizacji poszczególnych stanowisk.

W celu optymalizacji organizacji procesu naprawy sprzętu wojskowego należy określić taki sposób rozmieszczenia stanowisk naprawczych, dla którego wielkość pracy transportowej rozumiana jako suma iloczynów ciężarów przewożonych materiałów i odległości będzie minimalna. W badaniach przyjęto następujące oznaczenia poszczególnych stanowisk naprawczych dla bezzałogowych platform lądowych:

- 1 - stanowisko oceny uszkodzeń,
- 2 - stanowisko naprawy sprzętu rozpoznania inżynieryjnego,
- 3 - stanowisko naprawy sprzętu noktowizyjnego,
- 4 - stanowisko naprawy układu napędowego,
- 5 - stanowisko naprawy systemu sterowania,
- 6 - stanowisko naprawy sprzętu wsparcia ogniowego,
- 7 - stanowisko naprawy kamer wizyjnych,
- 8 - stanowisko naprawy układu jezdnego,
- 9 - stanowisko naprawy czujników rozpoznania chemicznego.

Na Rysunku 4.33 zilustrowano schemat blokowy zaproponowanej strategii postępowania umożliwiającej optymalizację organizacji procesu naprawy sprzętu wojskowego.



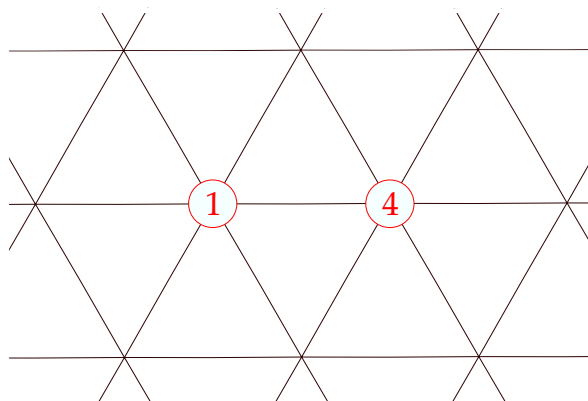
Rysunek 4.33: Schemat zaproponowanej strategii postępowania umożliwiającej optymalizację organizacji procesu naprawy.
(źródło: opracowanie własne)

W Tabeli 4.16 zestawiono wartości powiązań występujących pomiędzy rozpatrywanymi stanowiskami naprawczymi.

Tabela 4.16. Powiązania pomiędzy stanowiskami naprawczymi.

Stanowisko	Powiązania pomiędzy stanowiskami								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	–	19	13	75	20	18	24	60	11
2	19	–	10	16	70	21	18	52	27
3	13	10	–	70	20	29	11	36	60
4	75	16	70	–	10	8	8	60	70
5	20	70	20	10	–	28	9	60	10
6	18	21	29	8	28	–	32	24	11
7	24	18	11	8	9	32	–	8	10
8	60	52	36	60	60	24	8	–	18
9	11	27	60	70	10	11	10	18	–

Spośród wszystkich wartości powiązań, wartością maksymalną jest 75 odpowiadająca parze stanowisk 1 i 4 co oznacza, że najczęstszą przyczynę niesprawności bezzałogowych platform lądowych stanowiły awarie układu napędowego. Na Rysunku 4.34 zilustrowano sposób rozlokowania stanowisk naprawczych oznaczonych numerami 1 i 4 w siatce trójkątów równobocznych.



Rysunek 4.34: Sposób rozlokowania w siatce trójkątów równobocznych dwóch najbardziej powiązanych stanowisk naprawczych.

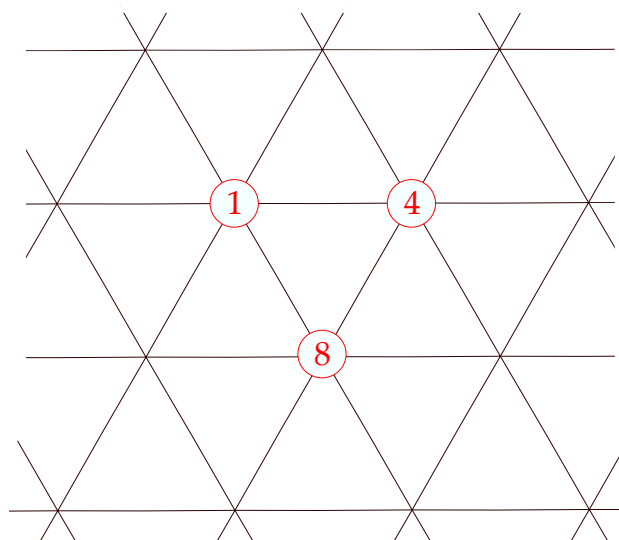
(źródło: opracowanie własne)

W kolejnym kroku obliczono sumę intensywności powiązań pomiędzy stanowiskami rozmieszczonymi oraz nierozmieszczonymi, zaś wyniki zobrazowano w Tabeli 4.17.

Tabela 4.17. Powiązania pomiędzy stanowiskami naprawczymi.

Stanowisko	Powiązania pomiędzy stanowiskami								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	–	19	13	75	20	18	24	60	11
2	19	–	10	16	70	21	18	52	27
3	13	10	–	70	20	29	11	36	60
4	75	16	70	–	10	8	8	60	70
5	20	70	20	10	–	28	9	60	10
6	18	21	29	8	28	–	32	24	11
7	24	18	11	8	9	32	–	8	10
8	60	52	36	60	60	24	8	–	18
9	11	27	60	70	10	11	10	18	–
1	–	19	13	–	20	18	24	60	11
4	–	16	70	–	10	8	8	60	70
Suma intensywności powiązań	–	35	83	–	30	26	32	120	81

Maksymalna suma intensywności równa 120 odpowiada stanowisku oznaczonemu numerem 8, które ma powiązania ze stanowiskami już rozlokowanymi, w związku z czym, w siatce trójkątów zostało ono rozmieszczone w węźle tworzącym trójkąt równoboczny z parą 1 i 4, co zilustrowano na Rysunku 4.35.



Rysunek 4.35: Sposób rozlokowania w siatce trójkątów równobocznych trzech najbardziej powiązanych stanowisk naprawczych.

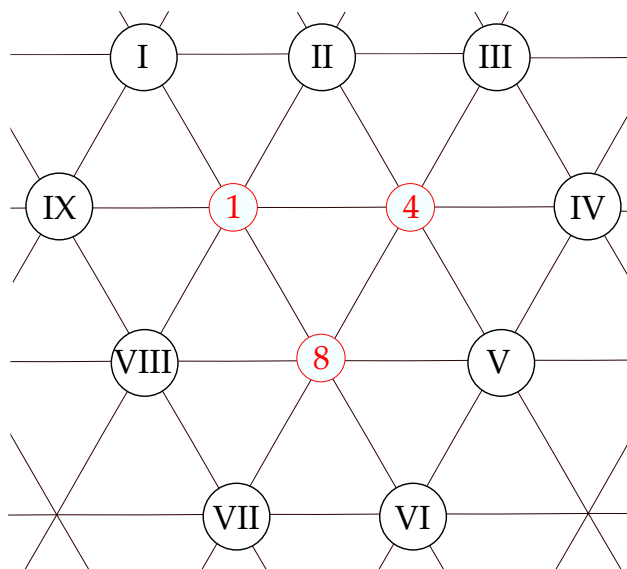
(źródło: opracowanie własne)

W celu wskazania kolejnego stanowiska naprawczego najbardziej powiązanego ze stanowiskami już usytuowanymi w siatce trójkątów ponownie obliczono sumę intensywności powiązań, zaś wyniki obliczeń przedstawiono w Tabeli 4.18.

Tabela 4.18. Powiązania występujące pomiędzy stanowiskami naprawczymi.

Stanowisko	Powiązania pomiędzy stanowiskami								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	–	19	13	75	20	18	24	60	11
2	19	–	10	16	70	21	18	52	27
3	13	10	–	70	20	29	11	36	60
4	75	16	70	–	10	8	8	60	70
5	20	70	20	10	–	28	9	60	10
6	18	21	29	8	28	–	32	24	11
7	24	18	11	8	9	32	–	8	10
8	60	52	36	60	60	24	8	–	18
9	11	27	60	70	10	11	10	18	–
1	–	19	13	–	20	18	24	60	11
4	–	16	70	–	10	8	8	60	70
8	–	52	36	–	60	24	8	–	18
Suma intensywności powiązań	–	87	119	–	90	50	40	–	99

Kolejnym stanowiskiem o największej wartości powiązań jest stanowisko oznaczone numerem 3, dla którego należy określić najkorzystniejsze miejsce rozmieszczenia w siatce trójkątów. Na Rysunku 4.36 zilustrowano dziewięć propozycji miejsc do rozlokowania stanowiska naprawy sprzętu noktowizyjnego.



Rysunek 4.36: Propozycje usytuowania w siatce trójkątów stanowiska numer 3.

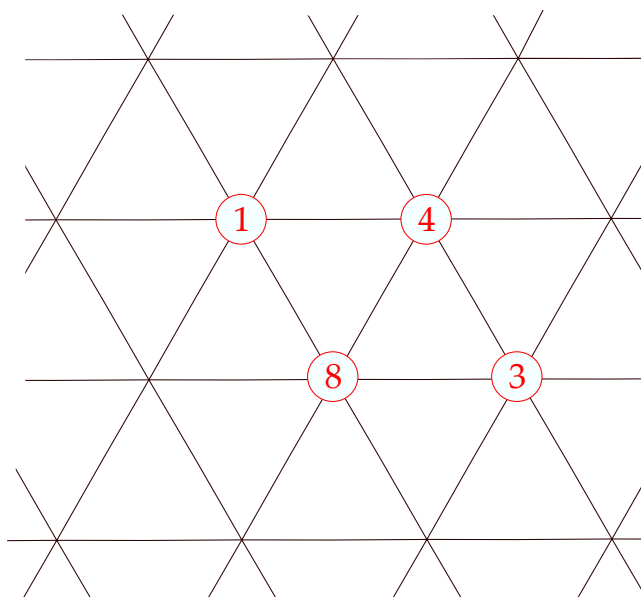
(źródło: opracowanie własne)

W następnym etapie należy obliczyć wartość funkcji celu rozumianą jako suma iloczynów ciężarów przewożonych materiałów i odległości dla wszystkich dziewięciu potencjalnych miejsc lokalizacji stanowiska 3. Wyniki obliczeń zestawiono w Tabeli 4.19.

Tabela 4.19. Wielkość pracy transportowej.

Stanowisko	Potencjalne miejsca lokalizacji stanowiska 3								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	13	13	26	26	26	26	26	13	13
4	140	70	70	70	70	140	140	140	140
8	72	72	72	72	36	36	36	36	72
Wartość funkcji celu	225	155	168	168	132	202	202	189	225

Minimalna wartość funkcji celu wynosi 132 co oznacza, że stanowisko numer 3 powinno zostać rozmieszczone w węźle oznaczonym jako V, co zilustrowano na Rysunku 4.37



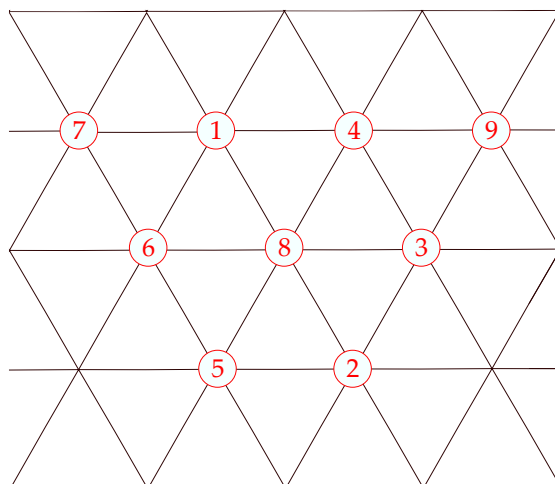
Rysunek 4.37: Sposób rozlokowania w siatce trójkątów równobocznych czterech najbardziej powiązanych stanowisk naprawczych.

(źródło: opracowanie własne)

Postępując zgodnie z zaprezentowanym schematem określono kolejność rozmieszczania poszczególnych stanowisk naprawczych. Wyniki przeprowadzonych obliczeń zestawiono w Tabeli 4.20, natomiast na Rysunku 4.38 zilustrowano optymalny sposób rozmieszczenia stanowisk naprawczych.

Tabela 4.20. Powiązania występujące pomiędzy stanowiskami naprawczymi.

Stanowisko	Powiązania pomiędzy stanowiskami								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	–	19	13	75	20	18	24	60	11
2	19	–	10	16	70	21	18	52	27
3	13	10	–	70	20	29	11	36	60
4	75	16	70	–	10	8	8	60	70
5	20	70	20	10	–	28	9	60	10
6	18	21	29	8	28	–	32	24	11
7	24	18	11	8	9	32	–	8	10
8	60	52	36	60	60	24	8	–	18
9	11	27	60	70	10	11	10	18	–
1	–	19	13	–	20	18	24	60	11
4	–	16	70	–	10	8	8	60	70
8	–	52	36	–	60	24	8	–	18
3	–	10	–	–	20	29	11	–	60
Suma intensywności powiązań	–	97	–	–	110	79	51	–	159
9	–	27	–	–	10	11	10	–	–
Suma intensywności powiązań	–	124	–	–	120	90	61	–	–
2	–	–	–	–	70	21	18	–	–
Suma intensywności powiązań	–	–	–	–	190	111	79	–	–
5	–	–	–	–	–	28	9	–	–
Suma intensywności powiązań	–	–	–	–	–	139	88	–	–
6	–	–	–	–	–	–	32	–	–
Suma intensywności powiązań	–	–	–	–	–	–	120	–	–
7	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Kolejność rozmieszczania stanowisk: 1, 4, 8, 3, 9, 2, 5, 6, 7									



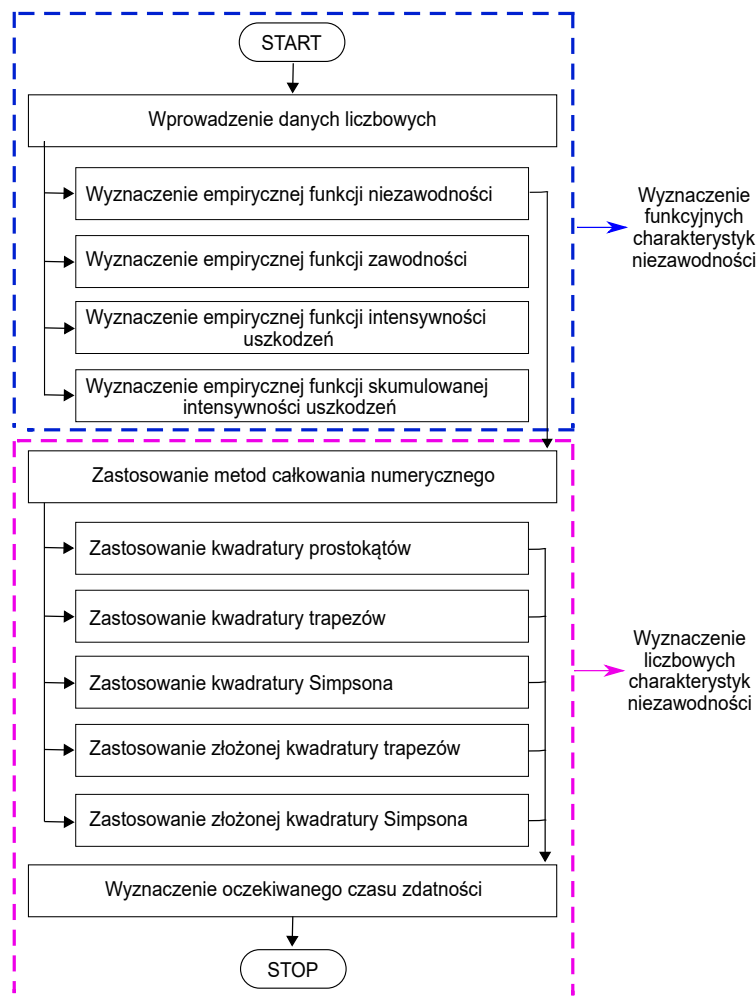
Rysunek 4.38: Optymalne rozmieszczenie wszystkich stanowisk naprawczych.
(źródło: opracowanie własne)

Propozycja organizacji procesu naprawy z wykorzystaniem metody Blocha-Schmigalli ma wiele korzyści, do których zaliczyć można zmniejszenie wielkości pracy transportowej czy też oszczędność czasu wynikającą z racjonalnego rozmieszczenia stanowisk naprawczych bezzałogowych platform lądowych. Ograniczeniami zaprezentowanej metody w praktyce może być zróżnicowana wielkość rozpatrywanych bezzałogowych platform lądowych lub ograniczona w naturalny sposób powierzchnia.

4.5. Metoda umożliwiająca określenie strategii postępowania w celu wyznaczenia oczekiwanego czasu zdatności pojazdów z zastosowaniem metod całkowania numerycznego

Niezawodność środków transportu świadczących usługi na potrzeby wojska ma kluczowe znaczenie z punktu widzenia realizacji zadań operacyjnych na różnych szczeblach dowodzenia. Wynika to z faktu, że podstawowym zadaniem logistyki wojskowej w ujęciu technicznym jest zapewnienie prawidłowej eksploatacji oraz utrzymanie odpowiedniego poziomu gotowości sprzętu wojskowego. Monitorowanie stanu technicznego pojazdów w zakresie częstotliwości przeprowadzanych profilaktycznych wymian podzespołów, zespołów i części w istotny sposób wpływa na zwiększenie niezawodności całego systemu transportowego. Na potrzeby niniejszej dysertacji opracowano strategię postępowania mającą na celu wyznaczenie oczekiwanego czasu zdatności pojazdów na przykładzie wybranej jednostki wojskowej. Analizie poddano grupę środków transportu średniej ładowności wysokiej mobilności o dopuszczalnej masie całkowitej nie przekraczającej 7 000 (kg). Głównym przeznaczeniem badanej grupy pojazdów był przewóz osób, ładunków oraz wykorzystanie podwozia do zabudowy urządzeniami specjalnymi w zależności od realizowanych zadań. W trakcie badań

rejestrowano codzienny przebieg eksploatacyjny w okresie od 31.12.2013 r. do 30.06.2015 r. oraz moment wystąpienia niesprawności. Z powodu braku dostępu do kart naprawy przyjęto założenie upraszczające, że rozpatrywane pojazdy nie są odnawialne. Dane liczbowe, które posłużyły do przeprowadzenia obliczeń zostały zaczerpnięte z wojskowych dokumentów eksploatacyjnych tj. rozkazów wyjazdu oraz kart usług technicznych. Na potrzeby badań opracowano program komputerowy umożliwiający wyznaczenie za pomocą metod całkowania numerycznego miary niezawodności stanowiącej oczekiwany czas zdatności pojazdów. Przeprowadzona analiza umożliwia wyznaczenie zarówno liczbowych, jak i funkcyjnych miar niezawodności. W badaniach wykorzystano oprogramowanie GNU Octave (wersja 3.4.3). Szczegółowe wyniki przeprowadzonych obliczeń zostały opisane w publikacji [2] stanowiącej jedną z podstaw niniejszej rozprawy doktorskiej. Na Rysunku 4.39 zilustrowano schemat zaproponowanej strategii postępowania umożliwiającej wyznaczenie oczekiwanego czasu zdatności w odniesieniu do dowolnych obiektów technicznych.



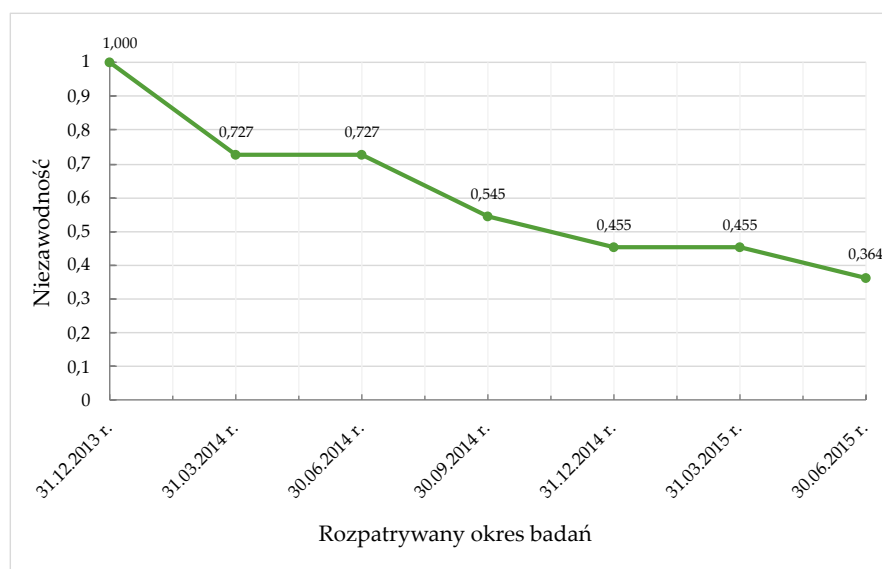
Rysunek 4.39: Schemat zaproponowanej strategii postępowania umożliwiającej wyznaczenie oczekiwanego czasu zdatności.
(źródło: opracowanie własne)

W Tabeli 4.21 zestawiono dane liczbowe dotyczące liczby zdatnych i niezdatnych obiektów technicznych w rozpatrywanym okresie eksploatacji, na podstawie których przeprowadzono obliczenia.

Tabela 4.21. Dane liczbowe dotyczące liczby zdatnych oraz niezdatnych pojazdów w rozpatrywanym okresie eksploatacji.

Okres eksploatacji t	Liczba pojazdów zdatnych $n(t)$	Liczba pojazdów niezdatnych $m(t)$
31.12.2013 r.	11	0
01.01.2014 r. – 31.03.2014 r.	8	3
01.04.2014 r. – 30.06.2014 r.	8	3
01.07.2014 r. – 30.09.2014 r.	6	5
01.10.2014 r. – 31.12.2014 r.	5	6
01.01.2015 r. – 31.03.2015 r.	5	6
01.04.2015 r. – 30.06.2015 r.	4	7

Empiryczną funkcję niezawodności wyznaczono na podstawie zależności (3.22), natomiast wykres funkcji zilustrowano na Rysunku 4.40.



Rysunek 4.40: Wykres empirycznej funkcji niezawodności.
(źródło: opracowanie własne)

Z wykresu empirycznej funkcji niezawodności wynika, że w rozpatrywanym okresie dwukrotnie nie odnotowano zmian liczby zdatnych pojazdów. Z interpretacji geometrycznej całki i wzoru (3.22) wynika, że oczekiwany czas zdatności jest równy polu obszaru ograniczonego wykresem funkcji niezawodności oraz osiami układu współrzędnych. W celu wyznaczenia oczekiwanego czasu zdatności, wykorzystując całkowanie numeryczne, obliczono wartości poszczególnych kwadratów prostych i złożonych zaś wyniki wyświetlono na Rysunku 4.41.

```

Octave3.4.3
octave:1> kwadratury

PROSZE WPISAC FUNKCJE "y=-0.0337*x+0.8562"
jaki ma byc lewy koniec przedzialu calkowania 0
jaki ma byc prawy koniec przedzialu calkowania 18
Prostokatow = 9.9522
Trapezow = 9.9522
Simpsona = 9.9522
PROSZE OKRESLIC NA ILE CZESCI MA ZOSTAC PODZIELONY PRZEDZIAL 100
Trapezow_zlozona = 9.9522
Simpsona_zlozona = 9.9522

PROSZE WPISAC FUNKCJE "y=-0.0002*x.^3+0.0064*x.^2-0.0897*x+0.9286"
jaki ma byc lewy koniec przedzialu calkowania 0
jaki ma byc prawy koniec przedzialu calkowania 18
Prostokatow = 8.8902
Trapezow = 10.348
Simpsona = 9.3762
PROSZE OKRESLIC NA ILE CZESCI MA ZOSTAC PODZIELONY PRZEDZIAL 100
Trapezow_zlozona = 9.3763
Simpsona_zlozona = 9.3762

PROSZE WPISAC FUNKCJE "y=0.8685*exp(-0.056*x)"
jaki ma byc lewy koniec przedzialu calkowania 0
jaki ma byc prawy koniec przedzialu calkowania 18
Prostokatow = 9.4440
Trapezow = 10.669
Simpsona = 9.8524
PROSZE OKRESLIC NA ILE CZESCI MA ZOSTAC PODZIELONY PRZEDZIAL 100
Trapezow_zlozona = 9.8491
Simpsona_zlozona = 9.8490

```

Rysunek 4.41: Rezultat zastosowania metod całkowania numerycznego.
(źródło: opracowanie własne)

W Tabeli 4.22 przedstawiono wartości współczynników dopasowania w zależności od przyjętych empirycznych funkcji niezawodności opisanych wzorami (4.4) - (4.6) oraz rezultat zastosowania poszczególnych metod całkowania numerycznego.

$$\bar{R}_1(t) = -0.0337t + 0.8562, \quad (4.4)$$

$$\bar{R}_2(t) = -0.0002t^3 + 0.0064t^2 - 0.0897t + 0.9286, \quad (4.5)$$

$$\bar{R}_3(t) = 0.8685 \exp^{-0.056t}. \quad (4.6)$$

Tabela 4.22. Wyniki obliczeń po zastosowaniu kwadratur prostych i złożonych.

Funkcja	Metoda					Współczynnik dopasowania R^2
	Prostokątów	Trapezów	Simpsona	Złożona trapezów	Złożona Simpsona	
$\bar{R}_1(t)$	9.9522	9.9522	9.9522	9.9522	9.9522	0.85
$\bar{R}_2(t)$	8.8902	10.348	9.3762	9.3763	9.3762	0.91
$\bar{R}_3(t)$	9.4440	10.669	9.8524	9.8491	9.8490	0.93

Najniższą wartość współczynnika dopasowania R^2 uzyskano stosując aproksymację funkcją liniową. Przybliżenie empirycznej funkcji niezawodności wielomianem stopnia pierwszego doprowadziło w rezultacie do wyznaczenia jednakowej wartości oczekiwanego czasu zdatności dla każdej z zastosowanych kwadratur. Korzystając z wielomianu stopnia trzeciego otrzymano wyższy współczynnik dopasowania niż wyznaczony za pomocą funkcji liniowej. Należy jednak zauważyć, iż najwyższy współczynnik R^2 równy 0.93 uzyskano aproksymując empiryczną funkcję niezawodności za pomocą funkcji wykładniczej. Zaproponowany w artykule [2] program komputerowy umożliwi wyznaczenie przy wykorzystaniu metod całkowania numerycznego miary niezawodności stanowiącej oczekiwany czas zdatności pojazdów w sytuacji gdy $t \rightarrow \infty$. Wyniki obliczeń przedstawiono na Rysunku 4.42.

```

Octave3.4.3
octave:1> kwadratury_zlozone

PROSZE WPISAC FUNKCJE "y=0.8685*exp(-0.056*x)"
jaki ma byc lewy koniec przedzialu calkowania 0
jaki ma byc prawy koniec przedzialu calkowania 100
PROSZE OKRESLIC NA ILE CZESCI MA ZOSTAC PODZIELONY PRZEDZIAL 50000
Trapezow_zlozona = 15.452
Simpsona_zlozona = 15.452

PROSZE WPISAC FUNKCJE "y=0.8685*exp(-0.056*x)"
jaki ma byc lewy koniec przedzialu calkowania 0
jaki ma byc prawy koniec przedzialu calkowania 300
PROSZE OKRESLIC NA ILE CZESCI MA ZOSTAC PODZIELONY PRZEDZIAL 50000
Trapezow_zlozona = 15.509
Simpsona_zlozona = 15.509

PROSZE WPISAC FUNKCJE "y=0.8685*exp(-0.056*x)"
jaki ma byc lewy koniec przedzialu calkowania 0
jaki ma byc prawy koniec przedzialu calkowania 500
PROSZE OKRESLIC NA ILE CZESCI MA ZOSTAC PODZIELONY PRZEDZIAL 50000
Trapezow_zlozona = 15.509
Simpsona_zlozona = 15.509

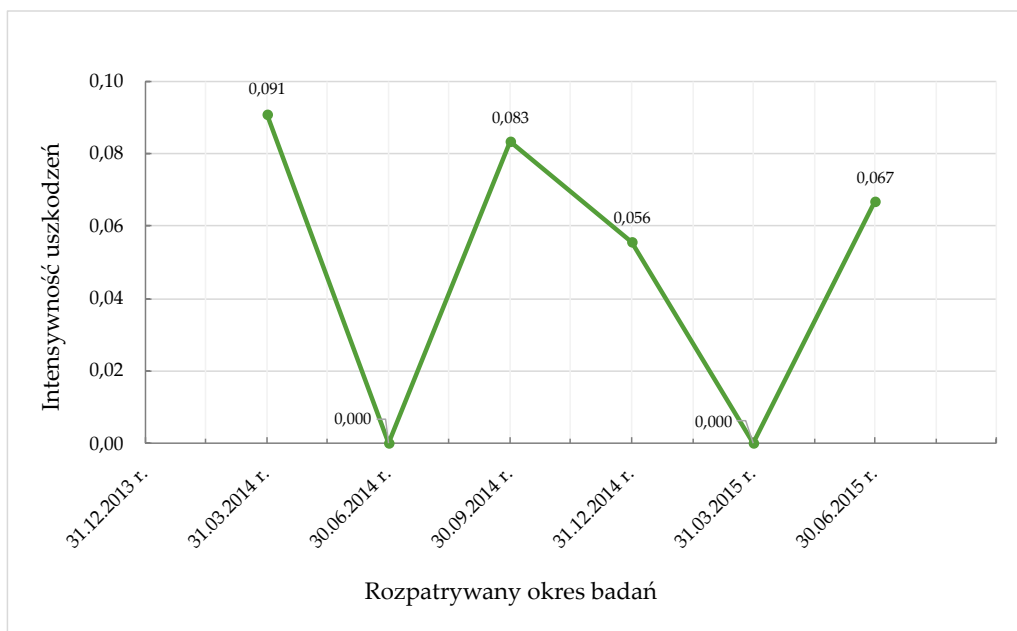
```

Rysunek 4.42: Rezultat zastosowania metod całkowania numerycznego.

(źródło: opracowanie własne)

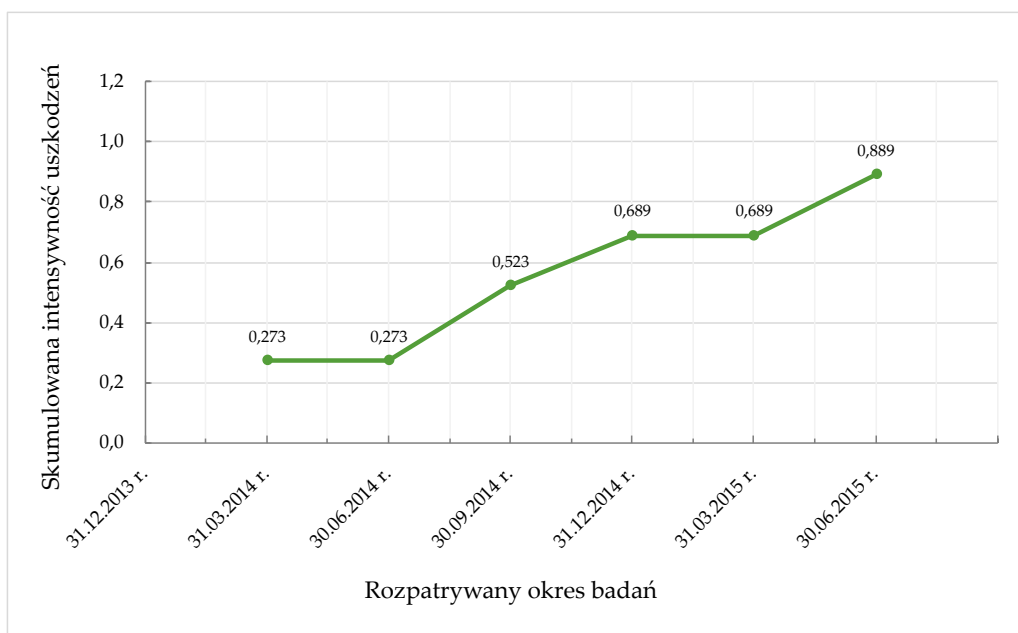
Należy zauważyć, że w zależności od długości przedziału całkowania, wartości otrzymane za pomocą kwadratur złożonych są w niewielkim stopniu zróżnicowane. Zwiększenie

liczby podziału przedziału całkowania zapewnia zbieżność otrzymanych wyników. Oczekiwany czas zdatności rozpatrywanych pojazdów wynosi w przybliżeniu 15 miesięcy. W przeprowadzonych badaniach wyznaczono również funkcję intensywności uszkodzeń, której przebieg zależy od własności fizycznych, stawianych wymagań oraz warunków pracy rozpatrywanych obiektów. Może być funkcją stałą w czasie, monotonicznie malejącą bądź rosnącą, mieć jedno ekstremum (maksimum lub minimum) lub kilka punktów ekstremalnych. Występowanie punktów ekstremalnych wynika z faktu, iż w drugim kwartale 2014 r. oraz w pierwszym kwartale 2015 r. liczba pojazdów niezdatnych nie uległa zmianie. Wyniki przeprowadzonych obliczeń przedstawiono na Rysunku 4.43.



Rysunek 4.43: Wykres empirycznej funkcji intensywności uszkodzeń.
(źródło: opracowanie własne)

Z wykresu funkcji skumulowanej intensywności uszkodzeń wynika, że wraz z upływem czasu odnotowano wzrost liczby pojazdów niezdatnych czego przyczyną mogły być zachodzące procesy adaptacji i zużycia. W okresie adaptacji najczęściej występują tzw. uszkodzenia przedwcześnie, wynikające z nieprawidłowego wykonania obiektów lub zastosowania niewłaściwej technologii. W sytuacji, gdy wpływ procesu adaptacji jest pomijalny, zmęczenie lub zużycie obiektów ma odzwierciedlenie w rosnącej funkcji skumulowanej intensywności uszkodzeń, co zilustrowano na Rysunku 4.44.



Rysunek 4.44: Wykres empirycznej funkcji wiodącej.
(źródło: opracowanie własne)

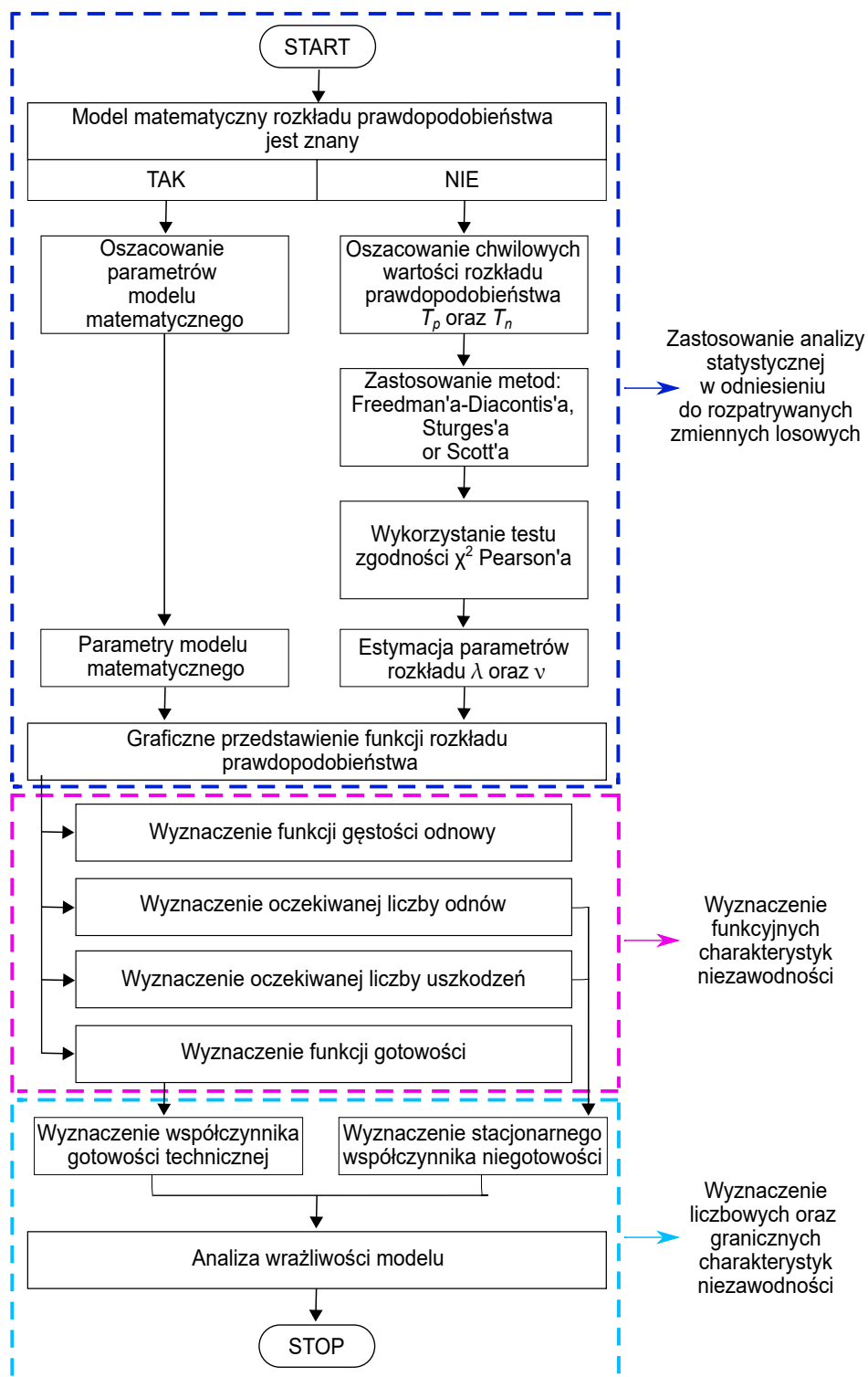
4.6. Metoda określania strategii postępowania prowadzącej do wyznaczenia współczynnika gotowości technicznej pojazdów z wykorzystaniem transformaty Laplace'a oraz metod wnioskowania statystycznego

Zapewnienie wymaganego poziomu gotowości systemu eksploatacji środków transportu jest możliwe dzięki właściwie przyjętej strategii sterowania procesem eksploatacji. Wykorzystanie odpowiednich metod matematycznych w celu sterowania procesem eksploatacji umożliwia podejmowanie racjonalnych decyzji przy jednoczesnym zapewnieniu prawidłowej realizacji przydzielonych zadań. Jedną z miar opisujących funkcjonowanie systemu eksploatacji środków transportu jest jego gotowość do realizacji określonych zadań przewozowych. Modelowanie gotowości systemu eksploatacji środków transportu ma szczególne znaczenie w systemach charakteryzujących się losowością występowania zadań. Na potrzeby niniejszej dysertacji opracowano algorytm umożliwiający modelowanie strategii postępowania, prowadzącej do wyznaczenia współczynnika gotowości technicznej pojazdów z wykorzystaniem transformaty Laplace'a oraz metod wnioskowania statystycznego. Badaniom poddano 25 samochodów ciężarowych średniej ładowności wysokiej mobilności o masie własnej 7 350 (kg) i ładowności 4 000 ÷ 8 000 (kg), realizujących zadania transportowe na terytorium Rzeczypospolitej Polskiej. Wszystkie pojazdy pochodziły z jednej partii produkcyjnej, co pozwoliło uznać próbę za jednorodną. Dane liczbowe niezbędne do wyznaczenia charakterystyk liczbowych i funkcyjnych oraz estymacji parametrów modelu procesu eksplo-

atacji środków transportu zostały zaczerpnięte z dokumentów eksploatacyjnych takich jak rozkazy wyjazdu oraz karty usług technicznych w okresie od 01.01.2017 r. do 31.12.2017 r. W modelu procesu eksploatacji z niepomijalnym czasem odnowy obiektu, czas niezdatności stanowi sumaryczny czas wymagany do przywrócenia stanu zdatności i obejmuje m.in. czas diagnozowania uszkodzenia, rzeczywisty czas naprawy oraz czas kontroli. Schemat algorytmu zaproponowanego w artykule [5] wchodzącym w skład niniejszej dystrybucji, umożliwiające wyznaczenie wybranych charakterystyk niezawodnościowych m.in. współczynnika gotowości technicznej w odniesieniu do rozpatrywanych obiektów technicznych zobrazowano na Rysunku 4.45. W Tabeli 4.23 wyrażono w minutach czasu zdatności oraz czasu niezdatności rozpatrywanych obiektów.

Tabela 4.23. Dane liczbowe dotyczące czasu zdatności oraz czasu niezdatności rozpatrywanych obiektów.

Środek transportu	Czas zdatności T_i (min.)	Czas niezdatności Θ_i (min.)
Obiekt 1	462 725.0	610.0
Obiekt 2	22 050.0	4 320.0
Obiekt 2	388 800.0	7 170.0
Obiekt 3	13 480.0	2 850.0
Obiekt 3	41 725.0	7 225.0
Obiekt 4	56 585.0	480.0
Obiekt 4	90 265.0	8 610.0
Obiekt 4	109 480.0	24 440.0
Obiekt 5	128 531.0	18 115.0
Obiekt 6	24 930.0	11 550.0
Obiekt 6	472 290.0	16 830.0
Obiekt 7	245 630.0	16 830.0
Obiekt 8	145 890.0	2 880.0
Obiekt 9	17 940.0	47 497.0
Obiekt 10	122 850.0	25 900.0
Obiekt 10	56 180.0	450.0
Obiekt 11	224 770.0	24 010.0
Obiekt 12	37 890.0	4 345.0
Obiekt 13	156 280.0	5 400.0
Obiekt 14	45 090.0	1 470.0
Obiekt 14	7 170.0	5 820.0
Obiekt 15	53 780.0	90.0
Obiekt 15	70 420.0	3 240.0
Obiekt 15	277 560.0	10 240.0
Obiekt 16	143 010.0	24 450.0
Obiekt 16	233 310.0	26 033.0
Obiekt 17	199 370.0	2 915.0
Obiekt 18	380 615.0	4 335.0
Obiekt 19	66 695.0	240.0
Obiekt 20	40 213.0	5 612.0
Obiekt 21	428 130.0	27 295.0
Obiekt 22	281 110.0	4 167.0
Obiekt 23	107 010.0	37 560.0
Obiekt 24	344 610.0	1 470.0
Obiekt 24	162 690.0	16 830.0
Obiekt 25	375 000.0	37 220.0
Obiekt 25	194 850.0	15 320.0



Rysunek 4.45: Schemat zaproponowanej strategii postępowania prowadzącej do wyznaczenia współczynnika gotowości technicznej.

(źródło: opracowanie własne)

Jeżeli dany obiekt realizuje zadanie przez okres T_1 , a uszkodzenie następuje w chwili t_1 , to wówczas zostaje poddany odnowie trwającej Θ_1 . Cykl może się powtórzyć co oznacza,

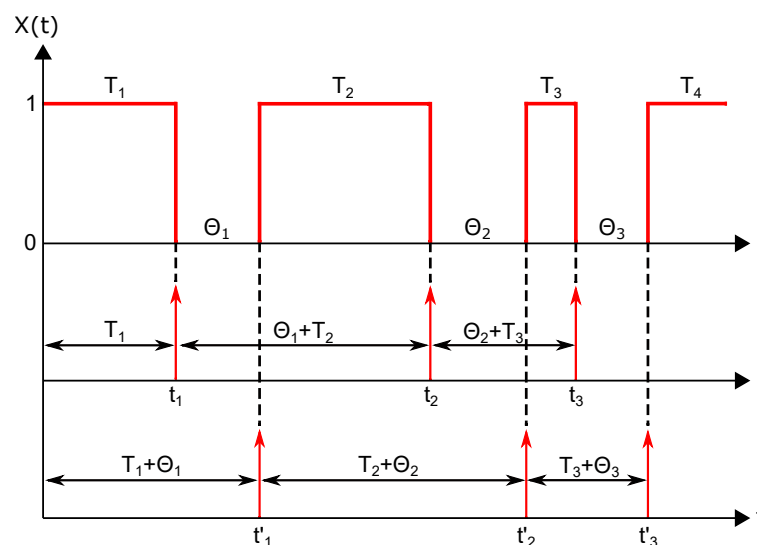
że odnowiony obiekt wykonuje zadanie przez okres T_2 , uszkodzenie następuje w momencie t_2 natomiast odnowa trwa Θ_2 . Schemat procesu eksploatacji w którym:

$$t_i = T_1 + \Theta_1 + \dots + T_{i-1} + \Theta_{i-1} + T_i \quad (4.7)$$

oznacza chwile uszkodzeń natomiast:

$$t'_i = T_1 + \Theta_1 + \dots + T_{i-1} + \Theta_{i-1} + T_i + \Theta_i \quad (4.8)$$

oznacza chwile odnowień zobrażowano na Rysunku 4.46.



Rysunek 4.46: Schemat procesu eksploatacji, w którym 1 - stan zdatności, 0 - stan niezdatności.
(źródło: opracowanie własne)

Jeżeli badaniom poddanych jest jednocześnie N obiektów tego samego typu, wówczas średni czas pomiędzy uszkodzeniami stanowi iloraz sumarycznego czasu użytkowania wszystkich obiektów do całkowitej liczby ich uszkodzeń [114], co można zapisać równaniem (4.9):

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{n}, \quad (4.9)$$

gdzie:

N - liczba obiektów,

T_i - czas poprawnej pracy i -tego obiektu,

n - całkowita liczba uszkodzeń (liczba obserwacji).

Korzystając z (4.9), wartość oczekiwana czasu zdatności wynosi:

$$T_p = \frac{6\,228\,924.0}{37} \approx 168\,349.297 \text{ (min.)}. \quad (4.10)$$

Jeżeli w procesie eksploatacji obiekty są naprawiane n -krotnie a czasy trwania poszczególnych napraw wynoszą odpowiednio $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$, wówczas średni czas naprawy można obliczyć zgodnie ze wzorem (4.11):

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^N \Theta_i}{n}, \quad (4.11)$$

gdzie:

Θ_i - czas i -tej odnowy.

Na podstawie danych zawartych w Tabeli 4.23 oraz zależności (4.11) otrzymano:

$$T_n = \frac{453\,819.0}{37} \approx 12\,265.378 \text{ (min.)}. \quad (4.12)$$

Wyrażenie to stanowi oszacowanie wartości oczekiwanej czasu niezdatności. Miarą naprawialności jest prawdopodobieństwo przywrócenia rozpatrywanym obiektom stanu zdatności. Naprawialność zależy zarówno od właściwości obiektów jak i od warunków w jakich zdatność jest przywracana. Do najważniejszych czynników wpływających na naprawialność należy zaliczyć:

- dostępność do elementów wymagających naprawy lub wymiany,
- czas potrzebny na wykonanie naprawy,
- zabezpieczenie przed możliwymi niesprawnościami (wyposażenie w dodatkowe urządzenia monitorujące),
- czas lokalizacji niesprawności,
- wyposażenie stanowisk obsługowych i naprawczych,
- organizacja obsług okresowych,
- trudności w ustaleniu przyczyn niesprawności,
- poziom wyszkolenia oraz liczba personelu.

W celu weryfikacji hipotezy dotyczącej zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem wykładniczym wykorzystano test zgodności χ^2 Pearson'a. Statystykę testową obliczono zgodnie z zależnością (3.62). Zweryfikowano następujące hipotezy:

$$H_0 : F(x) = F_0(x), \quad (4.13)$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x), \quad (4.14)$$

gdzie:

$F(x)$ - dystrybuanta empiryczna,

$F_0(x)$ - dystrybuanta rozkładu wykładniczego.

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 obliczona statystyka testowa ma rozkład χ^2 z $k - l - 1$ stopniami swobody. Obszar krytyczny testu określony jest następująco (4.15):

$$W = [\chi_{1-\alpha, k-l-1}^2, \infty), \quad (4.15)$$

W sytuacji, gdy $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2$, to wówczas należy odrzucić hipotezę H_0 . W przeciwnym przypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Test zgodności χ^2 Pearson'a może być wykorzystywany zarówno dla zmiennych losowych ciągłych jak i dyskretnych. W pierwszej kolejności niezbędne jest określenie liczby przedziałów klasowych k . W literaturze można zaobserwować brak jednoznaczności nie tylko co do ogólnej liczebności próby losowej ale również minimalnej liczebności w poszczególnych klasach. Do najpopularniejszych sposobów wyboru liczby klas należy zaliczyć metodę: Freedman'a-Diaconis'a, Sturges'a oraz Scott'a [120, 121, 129, 130, 131]. Niektórzy autorzy w celu określenia liczby przedziałów klasowych proponują skorzystanie ze specjalnej tablicy uzależniającej liczbę klas od liczby obserwacji. W niniejszych badaniach wykorzystano metodę Sturges'a:

$$k = 1 + 3.222 \log(n). \quad (4.16)$$

Wyniki testu χ^2 dla zmiennej losowej czas zdatności zobrazowano w Tabeli 4.24. Symbolem l_i oraz u_i oznaczono odpowiednio dolną i górną granicę i -tego przedziału klasowego.

Tabela 4.24. Wyniki testu χ^2 dla zmiennej losowej czas zdatności.

l_i	u_i	n_i	p_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	42308	8	0.2222	0.0060
42308	126924	10	0.3073	0.1648
126924	169232	5	0.1046	0.3309
169232	253848	5	0.1446	0.0228
253848	380772	5	0.1172	0.1013
380772	5000000	4	0.1042	0.0055

Wartość statystyki testowej χ^2 wyznaczona w odniesieniu do zmiennej losowej czas zdatności wynosi 0.631 natomiast obszar krytyczny $W = [9.4877, \infty)$. Ponieważ $\chi^2 \notin W$, na ustalonym poziomie istotności $\alpha = 0.05$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 co oznacza, że rozkład zmiennej czas zdatności jest zgodny z rozkładem wykładniczym. W badaniach wykorzystano oprogramowanie RStudio, które co prawda umożliwia automatyczne wyznaczenie p-value dla testu χ^2 natomiast należy jednak zwrócić szczególną uwagę na fakt, że automatyczne wywołanie funkcji `chisq.test` błędnie dobiera liczbę stopni swo-

body co ma kluczowe znaczenie przy wyznaczeniu p-value. Dla automatycznie przyjętej błędnej liczby 5 stopni swobody otrzymano nieprawidłowy wynik $p = 0.9865$. Z tego względu, wyznaczenie liczby stopni swobody zawsze powinno być zgodne z założeniami testu, co uwzględniono w zaproponowanym kodzie źródłowym, załączonym w publikacji [5]. W konsekwencji otrzymano $p = 0.9595$. Ponieważ wyznaczone p-value jest większe od przyjętego poziomu istotności $\alpha = 0.05$, zatem nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . Ponadto, z faktu że p-value jest większe od 0.1 wynika, że decyzja jest jednoznaczna. W Tabeli 4.25 zaprezentowano wyniki testu χ^2 w odniesieniu do zmiennej losowej czas niezdatności.

Tabela 4.25. Wyniki testu χ^2 dla zmiennej losowej czas niezdatności.

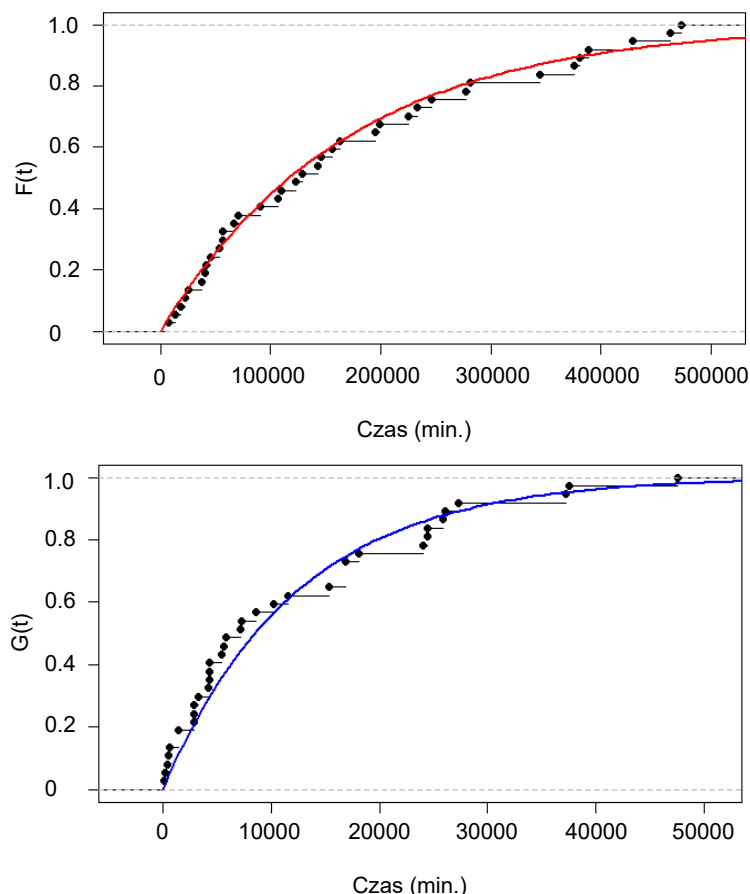
l_i	u_i	n_i	p_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	4231	12	0.2917	0.1346
4231	8462	8	0.2066	0.0165
8462	16924	7	0.2500	0.5473
16924	25386	4	0.1254	0.0883
25386	38079	5	0.0814	1.3140
38079	500000	1	0.0448	0.2619

Dokonując analizy zgodności rozkładu empirycznego z rozkładem wykładniczym w odniesieniu do zmiennej losowej czas niezdatności otrzymano $\chi^2 = 2.362$. Ponieważ na podstawie próby estymowano tylko jeden parametr rozkładu, w konsekwencji wyznaczono następujący obszar krytyczny $W = [9.4877, \infty)$. Wartość statystyki testowej $\chi^2 \notin W$, w związku z czym, na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 co oznacza, że rozkład zmiennej losowej czas niezdatności jest zgodny z rozkładem wykładniczym. W celu wyznaczenia p-value korzystanie z automatycznego doboru liczby stopni swobody, podobnie jak w przypadku zmiennej losowej czas zdatności, prowadzi do błędnych wyników. Uwzględniając założenia testu otrzymano $p = 0.6698$, co potwierdza jednoznaczność decyzji dotyczącej braku podstaw do odrzucenia H_0 . Przebieg dystrybuanty empirycznej oraz teoretycznej (rozkładu wykładniczego) dla rozpatrywanych zmiennych losowych przedstawiono na Rysunku 4.47.

Znajomość typu rozkładu zmiennych losowych umożliwia wykorzystanie metod estymacji parametrycznej. W skonstruowanym modelu matematycznym T_p jest estymatorem wartości oczekiwanej czasu zdatności, natomiast T_n jest estymatorem wartości oczekiwanej czasu niezdatności, w związku z czym możliwe jest wyznaczenie wartości parametrów rozkładu rozpatrywanych zmiennych losowych:

$$T_p = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 5.94 \times 10^{-6} \text{ (1/min.)}, \quad (4.17)$$

$$T_n = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = 8.15 \times 10^{-5} \text{ (1/min.)}. \quad (4.18)$$



Rysunek 4.47: Dystrybuanta empiryczna i teoretyczna zmiennych losowych T_i oraz Θ_i .
(źródło: opracowanie własne)

W analizie niezawodności szczególne znaczenie ma transformata Laplace'a umożliwiająca m.in. rozwiązywanie równań różniczkowych poprzez przekształcenie ich w równania algebraiczne. W celu wyznaczenia funkcji gęstości odnowy $h(t)$, korzystając z transformaty Laplace'a oraz z zależności (3.31), (3.38), (3.42) otrzymano:

$$\tilde{h}(s) = \frac{\frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)}}{1 - \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)}} = \frac{\lambda \nu}{(s+\lambda)(s+\nu)} \cdot \frac{(s+\lambda)(s+\nu)}{(s+\lambda)(s+\nu) - \lambda \nu} = \frac{\lambda \nu}{s(s+\nu+\lambda)}. \quad (4.19)$$

Dokonując rozkładu na ułamki proste:

$$\frac{\lambda \nu}{s(s+\nu+\lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+\nu+\lambda)}, \quad (4.20)$$

korzystając z własności transformaty Laplace'a:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = 1, \quad (4.21)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + \nu + \lambda} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - (-(\nu + \lambda))} \right] = e^{-(\nu + \lambda)t}, \quad (4.22)$$

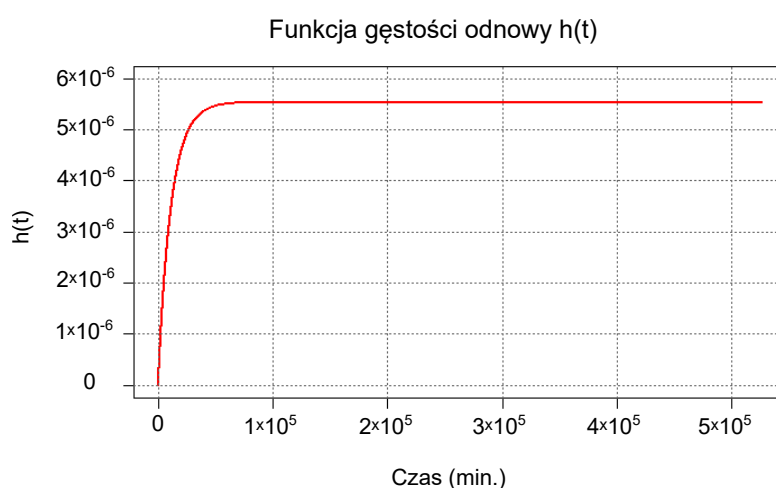
funkcja gęstości odnowy określona jest następująco (4.23):

$$h(t) = \frac{\lambda \nu}{\nu + \lambda} \left[1 - e^{-(\nu + \lambda)t} \right]. \quad (4.23)$$

W celu wyznaczenia gęstości odnowy w sytuacji, gdy $t \rightarrow \infty$ należy skorzystać z następującej zależności (4.24):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda \nu}{\nu + \lambda} \left[1 - e^{-(\nu + \lambda)t} \right] = \frac{\lambda \nu}{\nu + \lambda}. \quad (4.24)$$

Zgodnie z równaniami (4.17) oraz (4.18) przebieg funkcji gęstości odnowy zobrazowano na Rysunku 4.48.



Rysunek 4.48: Wykres funkcji gęstości odnowy.

(źródło: opracowanie własne)

Gęstość odnowy można interpretować jako oczekiwaną liczbę odnów w jednostce czasu. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń zauważono nieznaczną różnicę pomiędzy granicą funkcji gęstości odnowy $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 5.54 \times 10^{-6}$ oraz oszacowaniem parametru rozkładu $\lambda = 5.94 \times 10^{-6}$. Zależność, w której intensywność uszkodzeń jest bliska lub równa gęstości odnowy, jest typowa dla rozkładu wykładniczego, co stanowi dodatkowe potwierdzenie prawidłowości weryfikacji sformułowanych hipotez statystycznych dotyczących typu rozkładu zmiennej losowej czasu zdatności.

W celu wyznaczenia oczekiwanej liczby odnów w przedziale czasu $(0, t)$ należy skorzystać z zależności (3.30), (3.38) oraz (3.42):

$$\tilde{H}(s) = \frac{\frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)}}{s \left[1 - \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)} \right]} = \frac{\lambda \nu}{(s+\lambda)(s+\nu)} \cdot \frac{(s+\lambda)(s+\nu)}{s^2(s+\nu+\lambda)} = \frac{\lambda \nu}{s^2(s+\nu+\lambda)}. \quad (4.25)$$

Stosując rozkład na ułamki proste otrzymano:

$$\frac{\lambda \nu}{s^2(s+\nu+\lambda)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{(s+\nu+\lambda)}. \quad (4.26)$$

Korzystając z własności (4.21), (4.22) oraz:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = t, \quad (4.27)$$

w rezultacie oczekiwana liczba odnów w przedziale $(0, t)$ opisana jest równaniem (4.28):

$$H(t) = \frac{\lambda \nu}{(\nu+\lambda)^2} \left[-1 + (\lambda + \nu)t + e^{-(\lambda+\nu)t} \right]. \quad (4.28)$$

Twierdzenie Blackwella 4.1. [114] *Jeżeli prosty strumień odnowy nie jest okresowy, to dla każdego $\delta > 0$ zachodzi warunek:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H(t+\delta) - H(t)] = \frac{\delta}{E(T) + E(\Theta)}.$$

Wniosek 4.1. Dla $t \rightarrow \infty$, oczekiwana liczba odnów w przedziale czasu $(t, t + \delta)$ nie zależy od t .

Korzystając z faktu, że oczekiwana liczba uszkodzeń ma transformatę Laplace'a opisaną wzorem (3.32) możliwe jest wyznaczenie $H_u(t)$. W tym celu należy skorzystać z zależności (3.38) oraz (3.42):

$$\tilde{H}_u(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s \left[1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s) \right]} = \frac{\frac{\lambda}{(s+\lambda)}}{s \left[1 - \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)} \right]} = \frac{\lambda(s+\nu)}{s^2(s+\nu+\lambda)}. \quad (4.29)$$

Dokonując rozkładu na ułamki proste można zapisać następujące równanie:

$$\frac{\lambda(s+\nu)}{s^2(s+\nu+\lambda)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{(s+\nu+\lambda)}. \quad (4.30)$$

Korzystając z własności (4.21), (4.22) oraz (4.27) oczekiwaną liczbę uszkodzeń można wyznaczyć za pomocą wzoru (4.31):

$$H_u(t) = \frac{\lambda}{(\nu + \lambda)^2} \left[\lambda + \nu(\lambda + \nu)t - \lambda e^{-(\lambda + \nu)t} \right]. \quad (4.31)$$

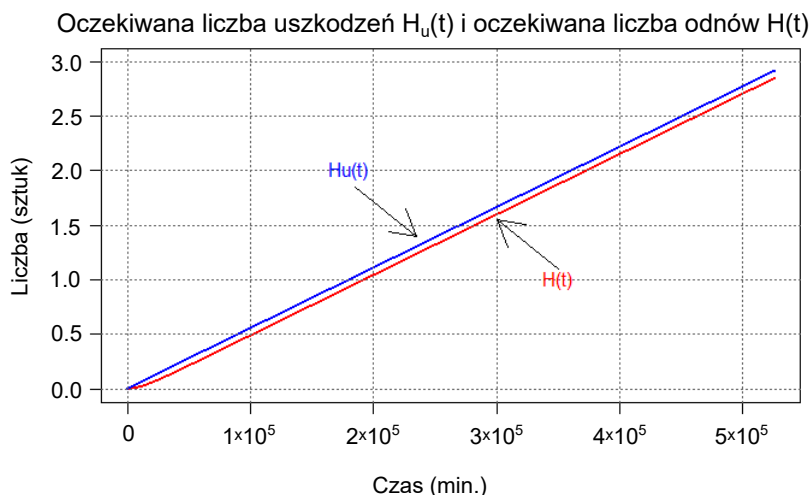
Twierdzenie Blackwella 4.2. [114] *Jeżeli prosty strumień odnowy nie jest okresowy, to dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi warunek:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H_u(t + \varepsilon) - H_u(t)] = \frac{\varepsilon}{E(T) + E(\Theta)}.$$

Wniosek 4.2. Dla $t \rightarrow \infty$, oczekiwana liczba uszkodzeń w przedziale czasu $(t, t + \varepsilon)$ nie zależy od t .

Na Rysunku 4.49 zobrazowano wykres oczekiwanej liczby uszkodzeń oraz oczekiwanej liczby odnów rozpatrywanych pojazdów, które dla zmiennych losowych określonych rozkładem wykładniczym mają charakter liniowy. Z twierdzenia (4.1) i (4.2) wynika, że dla $t \rightarrow \infty$ oraz dla każdego $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ jeżeli $\delta \approx \varepsilon$ wówczas:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H_u(t + \varepsilon) - H_u(t)] \approx \lim_{t \rightarrow \infty} [H(t + \delta) - H(t)]. \quad (4.32)$$



Rysunek 4.49: Wykres oczekiwanej liczby uszkodzeń oraz oczekiwanej liczby odnów.
(źródło: opracowanie własne)

Ilościową miarę niezawodności systemów stanowią wskaźniki niezawodności, które mogą być wyznaczone zarówno metodami analitycznymi, jak i symulacyjnymi. Wartość wybranego wskaźnika niezawodności rozpatrywanego systemu jest odpowiednią funkcją charakterystyk probabilistycznych modelu niezawodnościowego. W związku z tym, podstawę do wyznaczenia stacjonarnego współczynnika niegotowości stanowi znajomość oczekiwanej

liczby uszkodzeń i oczekiwanej liczby odnów rozpatrywanych obiektów. Współczynnik niegotowości $K_n(t)$, będący różnicą pomiędzy oczekiwaną liczbą uszkodzeń oraz oczekiwaną liczbą odnów, wyrażony jest zależnościami (4.33)-(4.35):

$$K_n(t) = H_u(t) - H(t), \quad (4.33)$$

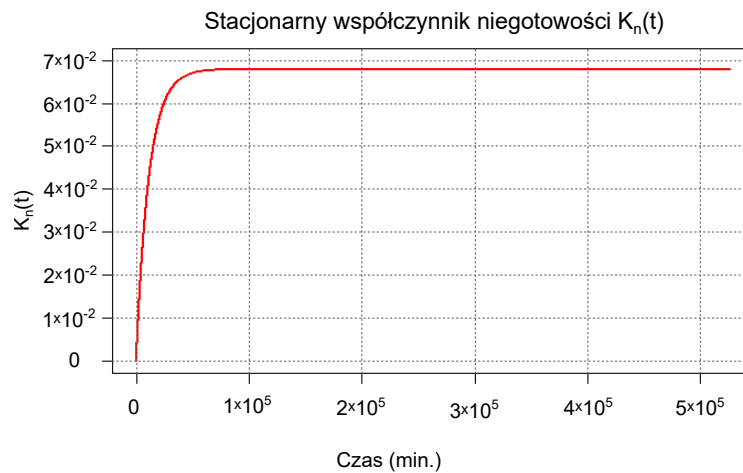
$$K_n(t) = \frac{\lambda}{(\nu + \lambda)^2} \left[\lambda + \nu(\lambda + \nu)t - \lambda e^{-(\lambda + \nu)t} \right] - \frac{\lambda}{(\nu + \lambda)^2} \left[-1 + (\lambda + \nu)t + e^{-(\lambda + \nu)t} \right], \quad (4.34)$$

$$K_n(t) = \frac{\lambda}{\nu + \lambda} \left[1 - e^{-(\lambda + \nu)t} \right]. \quad (4.35)$$

Należy zauważyć, że $K_n(t) = 0$ dla $t = 0$, natomiast dla $t \rightarrow \infty$ wynosi (4.36):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\nu + \lambda} \left[1 - e^{-(\lambda + \nu)t} \right] = \frac{\lambda}{\nu + \lambda}. \quad (4.36)$$

W odniesieniu do rozpatrywanych obiektów, stacjonarny współczynnik niegotowości wynosi $K_n = 6.79 \times 10^{-2}$. Wykres funkcji stanowiącej różnicę pomiędzy oczekiwaną liczbą uszkodzeń, a oczekiwaną liczbą odnów rozpatrywanych środków transportu w zależności od czasu, przedstawiono na Rysunku 4.50.



Rysunek 4.50: Stacjonarny współczynnik niegotowości.

(źródło: opracowanie własne)

Gotowość oznacza zdolność do natychmiastowej realizacji stawianych zadań we właściwym czasie, miejscu oraz dla ustalonych warunków eksploatacji. Z zależności (3.38), (3.42) oraz z faktu, że funkcja gotowości $K(t)$ ma transformatę Laplace'a określoną wzorem (3.34), prawdziwy jest zapis:

$$\tilde{K}(s) = \frac{1 - \tilde{f}(s)}{s [1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)]} = \frac{1 - \frac{\lambda}{(s+\lambda)}}{s \left[1 - \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)} \right]} = \frac{s + \nu}{s(s + \nu + \lambda)}. \quad (4.37)$$

Korzystając ponownie z rozkładu na ułamki proste:

$$\frac{s + v}{s(s + v + \lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + v + \lambda}, \quad (4.38)$$

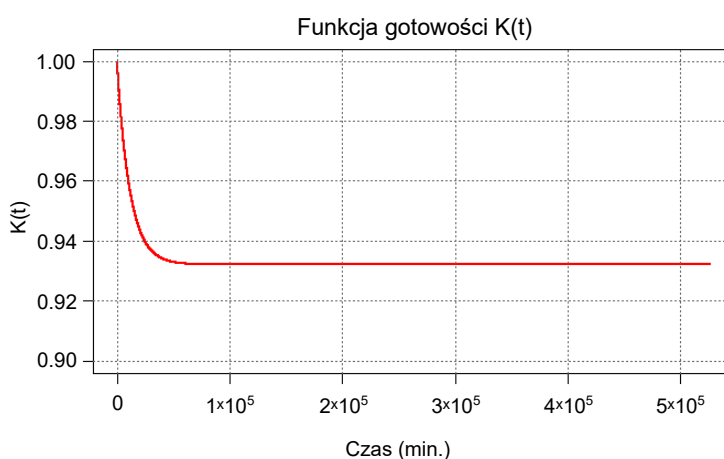
na podstawie własności (4.21) oraz (4.22), możliwe jest określenie funkcji gotowości:

$$K(t) = \frac{1}{v + \lambda} \left[v + \lambda e^{-(\lambda+v)t} \right]. \quad (4.39)$$

W sytuacji gdy czas zdatności rozpatrywany jest jako suma czasu poprawnej pracy, natomiast czas niezdatności stanowi sumaryczny czas naprawy rozpatrywanych obiektów technicznych, wówczas współczynnik gotowości nazywany jest współczynnikiem gotowości technicznej. Wartość współczynnika gotowości technicznej można wyrazić jako iloraz całkowitego czasu przebywania obiektów w stanie zdatności i sumarycznego czasu przebywania obiektów w stanie zdatności i niezdatności do realizacji zadań przewozowych. W przypadku, gdy $t \rightarrow \infty$, to współczynnik gotowości technicznej można zapisać w następujący sposób (4.40):

$$K_g = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{v + \lambda} \left[v + \lambda e^{-(\lambda+v)t} \right] = \frac{v}{v + \lambda}. \quad (4.40)$$

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń, w oparciu o zależności (4.17) oraz (4.18), wyznaczono współczynnik gotowości technicznej pojazdów, którego wartość dla $t \rightarrow \infty$ wynosi 93.21(%). Funkcyjną charakterystykę niezawodności wyrażoną poprzez funkcję gotowości rozpatrywanych środków transportu zilustrowano na Rysunku 4.51.



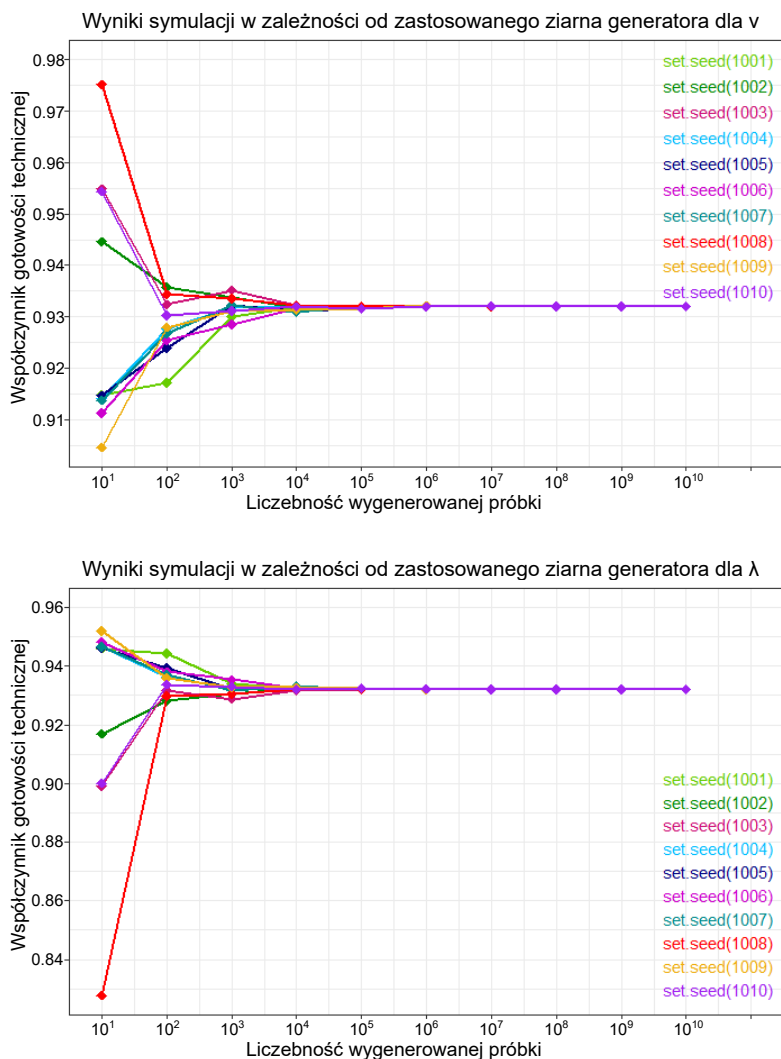
Rysunek 4.51: Funkcja gotowości rozpatrywanych środków transportu.

(źródło: opracowanie własne)

Współczynnik gotowości technicznej można interpretować jako udział czasu przebywania obiektów technicznych w stanie zdatności w całym okresie eksploatacji natomiast funkcja gotowości oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że rozpatrywany system w do-

wolnej chwili t będzie w stanie zdatności. Na obniżenie współczynnika gotowości technicznej istotny wpływ miała nieterminowość zaopatrzenia w części zamienne, co znacząco wydłużyło czas odnowy pojazdów oznaczonych numerem 9 i 23.

W celu walidacji zaproponowanej metody modelowania strategii postępowania prowadzącej do wyznaczenia współczynnika gotowości technicznej utworzono model symulacyjny, który zaimplementowano w R. W celu wygenerowania losowych obserwacji wykorzystano funkcję `rexp`. Aby otrzymane wyniki mogły być powtórzone również przez innych autorów, w artykule [5] załączono przyjęte ziarna generatorów. Przeprowadzono 200 symulacji dla różnych ziaren generatorów oraz różnych liczebności wygenerowanych próbek. W przeprowadzonych badaniach, opartych na 74 obserwacjach, współczynnik gotowości technicznej rozpatrywanych pojazdów wyniósł 93.21(%). W wyniku przeprowadzonej symulacji, otrzymane wartości współczynnika gotowości dla każdego z rozpatrywanych wariantów zobrazowano na Rysunku 4.52.



Rysunek 4.52: Wyniki symulacji w zależności od zastosowanego ziarna generatora dla ν oraz λ .
(źródło: opracowanie własne)

Współczynnik gotowości technicznej obliczony na podstawie wygenerowanych próbek losowych jest zbliżony z wynikami zaproponowanego na potrzeby niniejszej dysertacji algorytmu. Największe rozbieżności odnotowano dla symulacji, w której wygenerowane próbki nie przekraczają 100 obserwacji. Ponadto, warto podkreślić, że zaproponowany algorytm umożliwia dokładne wyznaczenie wartości współczynnika gotowości technicznej na podstawie wyłącznie 74 obserwacji, w związku z czym z powodzeniem może być stosowany do modelowania gotowości technicznej dowolnych obiektów technicznych, zwłaszcza takich, dla których dostęp do danych empirycznych jest ograniczony.

4.7. Metoda postępowania umożliwiająca maksymalizację zysku z redundancji przy jednoczesnym uwzględnieniu ograniczeń finansowych

Zwiększenie niezawodności systemu możliwe jest dzięki wprowadzeniu redundancji, która zawsze powinna być racjonalnie zaplanowana, ze względu na fakt, że wprowadzenie rezerwy powoduje konieczność ponoszenia dodatkowych kosztów. Z uwagi na koszty rezerwowania oraz zyski wynikające z wprowadzenia nadmiaru, planowanie redundancji systemu jest zadaniem optymalizacyjnym, w którym bardzo istotna jest znajomość wskaźników gotowości rozpatrywanych obiektów. Na potrzeby niniejszej rozprawy doktorskiej opracowano strategię postępowania umożliwiającą maksymalizację zysku z redundancji przy jednoczesnym uwzględnieniu ograniczeń finansowych. Przedmiot badań stanowiła próba 45 pojazdów typu STAR 266, będących na zaopatrzeniu 9 kompanii transportowych zlokalizowanych na terytorium Rzeczypospolitej Polskiej. Dane liczbowe niezbędne do przeprowadzenia obliczeń zaczerpnięto z rozkazów wyjazdu i kart usług technicznych obejmujących okres od 01.01.2018 r. do 31.12.2018 r. Każda kompania dysponowała 5 pojazdami, stanowiącymi elementy podstawowe natomiast elementy rezerwowe stanowiły 4 pojazdy realizujące zadania na potrzeby 9. kompanii. Ponieważ zysk z rezerwowania jest miarą ściśle związaną z wybranym wskaźnikiem niezawodności, to w badaniach wskaźnik ten stanowi współczynnik gotowości systemu. W celu maksymalizacji zysku z redundancji w pierwszej kolejności wyznaczono wartości współczynnika gotowości oddzielnie dla wszystkich rozpatrywanych pojazdów. W skonstruowanym modelu matematycznym z niepomiąlnym czasem odnowy określono następujące stany eksploatacyjne stanowiące przestrzeń fazową:

- s_1 - zadanie,
- s_2 - tankowanie,
- s_3 - garażowanie,
- s_4 - obsługa dzienna,
- s_5 - dzień techniczny,

- s_6 - naprawa bieżąca,
- s_7 - obsługa okresowa OO-1,
- s_8 - obsługa okresowa OO-2,
- s_9 - obsługa roczna.

W badaniach dokonano podziału zbioru stanów eksploatacyjnych wyodrębniając stany gotowości: s_1, s_2, s_3, s_4 oraz stany niegotowości: s_5, s_6, s_7, s_8, s_9 . Jeżeli znane są średnie czasy przebywania w poszczególnych stanach oraz częstości występowania wyodrębnionych stanów eksploatacyjnych, wówczas gotowość pojedynczego obiektu technicznego można wyrazić korzystając z zależności (4.41):

$$k_g(t) = \frac{\sum_{k=1}^{n_1} v_k T_k}{\sum_{k=1}^m v_k T_k}, \quad (4.41)$$

gdzie:

$k_g(t)$ - współczynnik gotowości pojedynczego obiektu,

n_1 - liczba stanów gotowości (liczność zbioru stanów gotowości),

n_2 - liczba stanów niegotowości (liczność zbioru stanów niegotowości),

m - liczba wszystkich stanów eksploatacyjnych, $m = n_1 + n_2$,

v_k - częstość występowania poszczególnych stanów eksploatacyjnych, $k = 1, \dots, m$,

T_k - średni czas przebywania w k -tym stanie eksploatacyjnym.

Należy wyznaczyć takie zmienne binarne (4.42):

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \{0, 1\}^n, \quad (4.42)$$

gdzie:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i\text{-ty element będzie uwzględniony w strategii redundancji,} \\ 0 & \text{gdy } i\text{-ty element nie będzie uwzględniony w strategii redundancji,} \end{cases}$$

aby przy ustalonej strategii otrzymać maksymalny zysk z rezerwowania (4.43) przy jednoczesnym uwzględnieniu ograniczeń finansowych (4.44):

$$\eta_{k_{gs}(t)}(t) = \frac{k_{gs_j}^*(t)}{k_{gs_j}(t)}, \quad (4.43)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i c_i \leq C, \quad (4.44)$$

gdzie:

$\eta_{k_{gs}(t)}(t)$ - miara redundancji strukturalnej,

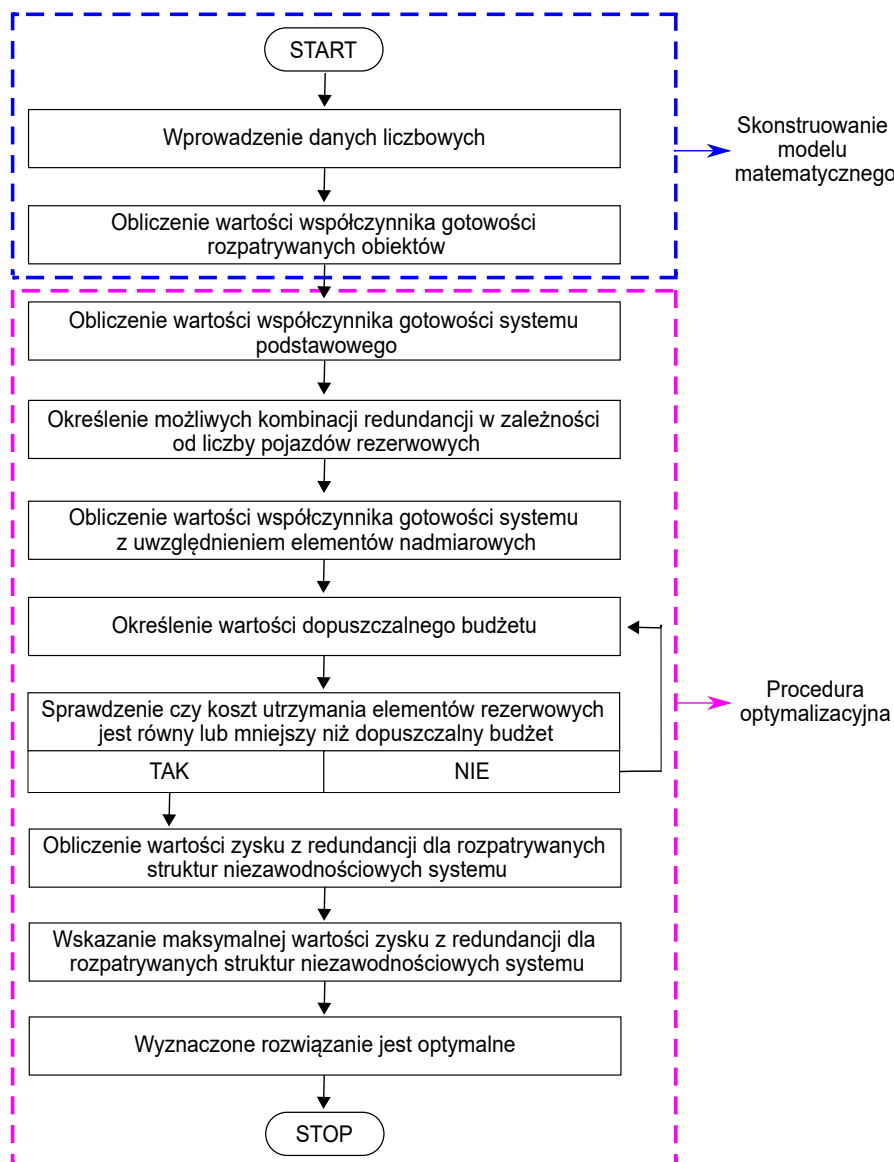
$k_{gs_j}^*(t)$ - współczynnik gotowości systemu (j -tej kompanii transportowej) z uwzględnieniem elementów nadmiarowych,

$k_{gs_j}(t)$ - współczynnik gotowości systemu podstawowego,

c_i - koszt utrzymania i -tego elementu stanowiącego rezerwę,

C - nieprzekraczalny koszt całkowity (dopuszczalny budżet).

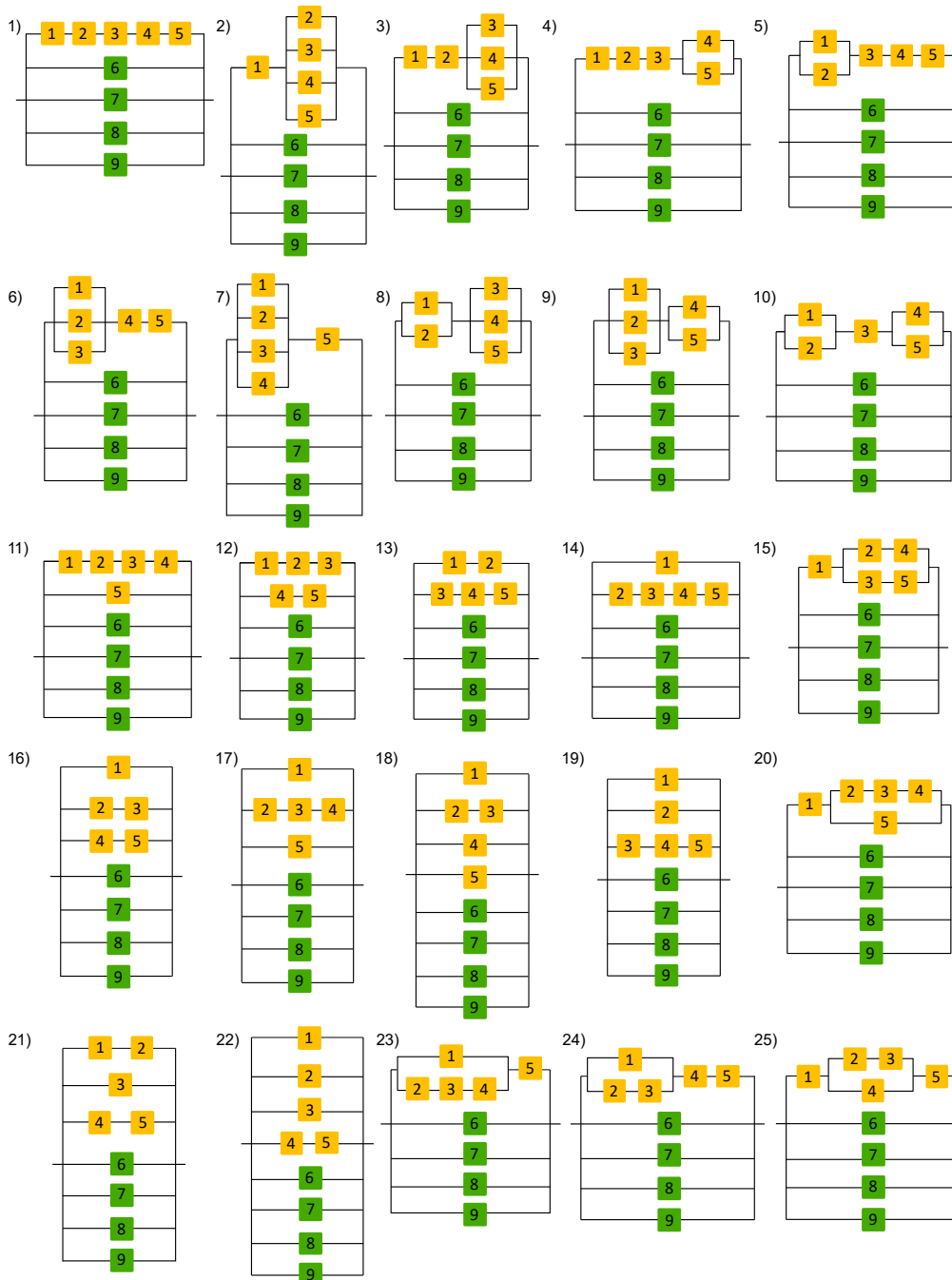
Na Rysunku 4.53 zilustrowano schemat zaproponowanej strategii postępowania prowadzącej do maksymalizacji zysku z redundancji.



Rysunek 4.53: Schemat zaproponowanej strategii postępowania umożliwiającej maksymalizację zysku z redundancji.

(źródło: opracowanie własne)

Każda kompania transportowa dysponowała 5 pojazdami stanowiącymi elementy podstawowe natomiast rezerwę stanowiły maksymalnie 4 pojazdy będące na wyposażeniu 9. kompanii. W zależności od stawianych zadań przewozowych, realizowanych w ramach poszczególnych kompanii transportowych, na Rysunku 4.54 przedstawiono schematy blokowe struktur niezawodnościowych systemu z uwzględnieniem redundancji, w których kolorem żółtym oznaczono elementy podstawowe zaś zielonym - nadmiarowe.



Rysunek 4.54: Schematy blokowe struktur niezawodnościowych systemu transportowego z uwzględnieniem redundancji.

(źródło: opracowanie własne)

Następnie, dla każdej struktury niezawodnościowej wyprowadzono zależności funkcyjne umożliwiające wyznaczenie gotowości systemu podstawowego (j -tej kompanii transportowej):

- wariant 1) $k_{gs_j}(t) = k_{g_1}(t)k_{g_2}(t)k_{g_3}(t)k_{g_4}(t)k_{g_5}(t)$,
wariant 2) $k_{gs_j}(t) = k_{g_1}(t) [1 - (1 - k_{g_2}(t)) (1 - k_{g_3}(t)) (1 - k_{g_4}(t)) (1 - k_{g_5}(t))]$,
wariant 3) $k_{gs_j}(t) = k_{g_1}(t)k_{g_2}(t) [1 - (1 - k_{g_3}(t)) (1 - k_{g_4}(t)) (1 - k_{g_5}(t))]$,
wariant 4) $k_{gs_j}(t) = k_{g_1}(t)k_{g_2}(t)k_{g_3}(t) [1 - (1 - k_{g_4}(t)) (1 - k_{g_5}(t))]$,
wariant 5) $k_{gs_j}(t) = [1 - (1 - k_{g_1}(t)) (1 - k_{g_2}(t))] [k_{g_3}(t)k_{g_4}(t)k_{g_5}(t)]$,
wariant 6) $k_{gs_j}(t) = [1 - (1 - k_{g_1}(t)) (1 - k_{g_2}(t)) (1 - k_{g_3}(t))] [k_{g_4}(t)k_{g_5}(t)]$,
wariant 7) $k_{gs_j}(t) = [1 - (1 - k_{g_1}(t)) (1 - k_{g_2}(t)) (1 - k_{g_3}(t)) (1 - k_{g_4}(t))] [k_{g_5}(t)]$,
wariant 8) $k_{gs_j}(t) = [1 - (1 - k_{g_1}(t)) (1 - k_{g_2}(t))] [1 - (1 - k_{g_3}(t)) (1 - k_{g_4}(t)) (1 - k_{g_5}(t))]$,
wariant 9) $k_{gs_j}(t) = [1 - (1 - k_{g_1}(t)) (1 - k_{g_2}(t)) (1 - k_{g_3}(t))] [1 - (1 - k_{g_4}(t)) (1 - k_{g_5}(t))]$,
wariant 10) $k_{gs_j}(t) = [1 - (1 - k_{g_1}(t)) (1 - k_{g_2}(t))] k_{g_3}(t) [1 - (1 - k_{g_4}(t)) (1 - k_{g_5}(t))]$,
wariant 11) $k_{gs_j}(t) = 1 - [1 - k_{g_1}(t)k_{g_2}(t)k_{g_3}(t)k_{g_4}(t)] [1 - k_{g_5}(t)]$,
wariant 12) $k_{gs_j}(t) = 1 - [1 - k_{g_1}(t)k_{g_2}(t)k_{g_3}(t)] [1 - k_{g_4}(t)k_{g_5}(t)]$,
wariant 13) $k_{gs_j}(t) = 1 - [1 - k_{g_1}(t)k_{g_2}(t)] [1 - k_{g_3}(t)k_{g_4}(t)k_{g_5}(t)]$,
wariant 14) $k_{gs_j}(t) = 1 - [1 - k_{g_1}(t)] [1 - k_{g_2}(t)k_{g_3}(t)k_{g_4}(t)k_{g_5}(t)]$,
wariant 15) $k_{gs_j}(t) = k_{g_1}(t) [1 - [1 - k_{g_2}(t)k_{g_4}(t)] [1 - k_{g_3}(t)k_{g_5}(t)]]$,
wariant 16) $k_{gs_j}(t) = 1 - [1 - k_{g_1}(t)] [(1 - k_{g_2}(t)k_{g_3}(t)) (1 - k_{g_4}(t)k_{g_5}(t))]$,
wariant 17) $k_{gs_j}(t) = 1 - [(1 - k_{g_1}(t)) (1 - k_{g_2}(t)k_{g_3}(t)k_{g_4}(t)) (1 - k_{g_5}(t))]$,
wariant 18) $k_{gs_j}(t) = 1 - [(1 - k_{g_1}(t))] [(1 - k_{g_2}(t)k_{g_3}(t)) (1 - k_{g_4}(t)) (1 - k_{g_5}(t))]$,
wariant 19) $k_{gs_j}(t) = 1 - [(1 - k_{g_1}(t))] [(1 - k_{g_2}(t)) (1 - k_{g_3}(t)k_{g_4}(t)k_{g_5}(t))]$,
wariant 20) $k_{gs_j}(t) = k_{g_1}(t) [1 - (1 - k_{g_2}(t)k_{g_3}(t)k_{g_4}(t)) (1 - k_{g_5}(t))]$,
wariant 21) $k_{gs_j}(t) = 1 - [(1 - k_{g_1}(t)k_{g_2}(t)) (1 - k_{g_3}(t)) (1 - k_{g_4}(t)k_{g_5}(t))]$,
wariant 22) $k_{gs_j}(t) = 1 - [(1 - k_{g_1}(t)) (1 - k_{g_2}(t)) (1 - k_{g_3}(t)) (1 - k_{g_4}(t)k_{g_5}(t))]$,
wariant 23) $k_{gs_j}(t) = k_{g_5}(t) [1 - (1 - k_{g_1}(t))] [1 - k_{g_2}(t)k_{g_3}(t)k_{g_4}(t)]$,
wariant 24) $k_{gs_j}(t) = k_{g_4}(t)k_{g_5}(t) [1 - (1 - k_{g_1}(t)) (1 - k_{g_2}(t)k_{g_3}(t))]$,
wariant 25) $k_{gs_j}(t) = k_{g_1}(t) [1 - (1 - k_{g_2}(t)k_{g_3}(t))] [1 - k_{g_4}(t)] k_{g_3}(t)$,

gdzie:

$k_{g_r}(t)$ - współczynnik gotowości r -tego obiektu podstawowego w poszczególnych kompaniach transportowych obliczony na podstawie wzoru (4.41).

Dla zmiennych binarnych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ oraz dla zmiennej binarnej y zachodzi tożsamość (4.45):

$$y = \prod_{i=1}^n x_i \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i - y \leq n - 1, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - y \geq 0. \end{cases} \quad (4.45)$$

W związku z (4.45), w skonstruowanym modelu matematycznym należy wyznaczyć zmienne decyzyjne (4.46):

$$x = (x_6, x_7, x_8, x_9, y_{67}, y_{68}, y_{69}, y_{78}, y_{79}, y_{89}, y_{678}, y_{689}, y_{789}, y_{679}, y_{6789}) = \{0, 1\}^{15}, \quad (4.46)$$

dla których funkcja celu wyrażona za pomocą wzoru (4.47) osiąga maksimum:

$$\eta_{k_{g_s}(t)}(t) = \frac{1 - \left(1 - k_{g_{s_j}}(t)\right) (1 - x_6 k_{g_6}(t)) (1 - x_7 k_{g_7}(t)) (1 - x_8 k_{g_8}(t)) (1 - x_9 k_{g_9}(t))}{k_{g_{s_j}}(t)}, \quad (4.47)$$

przy warunkach ograniczających (4.48)-(4.71):

$$x_6 + x_7 - y_{67} \leq 1, \quad (4.48)$$

$$x_6 + x_8 - y_{68} \leq 1, \quad (4.49)$$

$$x_6 + x_9 - y_{69} \leq 1, \quad (4.50)$$

$$x_7 + x_8 - y_{78} \leq 1, \quad (4.51)$$

$$x_7 + x_9 - y_{79} \leq 1, \quad (4.52)$$

$$x_8 + x_9 - y_{89} \leq 1, \quad (4.53)$$

$$x_6 + x_7 + x_8 - y_{678} \leq 2, \quad (4.54)$$

$$x_6 + x_8 + x_9 - y_{689} \leq 2, \quad (4.55)$$

$$x_7 + x_8 + x_9 - y_{789} \leq 2, \quad (4.56)$$

$$x_6 + x_7 + x_9 - y_{679} \leq 2, \quad (4.57)$$

$$x_6 + x_7 + x_8 + x_9 - y_{6789} \leq 3, \quad (4.58)$$

$$\frac{1}{2}(x_6 + x_7) - y_{67} \geq 0, \quad (4.59)$$

$$\frac{1}{2}(x_6 + x_8) - y_{68} \geq 0, \quad (4.60)$$

$$\frac{1}{2}(x_6 + x_9) - y_{69} \geq 0, \quad (4.61)$$

$$\frac{1}{2}(x_7 + x_8) - y_{78} \geq 0, \quad (4.62)$$

$$\frac{1}{2}(x_7 + x_9) - y_{79} \geq 0, \quad (4.63)$$

$$\frac{1}{2}(x_8 + x_9) - y_{89} \geq 0, \quad (4.64)$$

$$\frac{1}{3}(x_6 + x_7 + x_8) - y_{678} \geq 0, \quad (4.65)$$

$$\frac{1}{3}(x_6 + x_8 + x_9) - y_{689} \geq 0, \quad (4.66)$$

$$\frac{1}{3}(x_7 + x_8 + x_9) - y_{789} \geq 0, \quad (4.67)$$

$$\frac{1}{3}(x_6 + x_7 + x_9) - y_{679} \geq 0, \quad (4.68)$$

$$\frac{1}{4}(x_6 + x_7 + x_8 + x_9) - y_{6789} \geq 0, \quad (4.69)$$

$$\sum_{i=6,7,8,9} x_i c_i \leq C, \quad (4.70)$$

$$\sum_{i=6,7,8,9} x_i c_i \geq \min_{i=6,7,8,9} c_i. \quad (4.71)$$

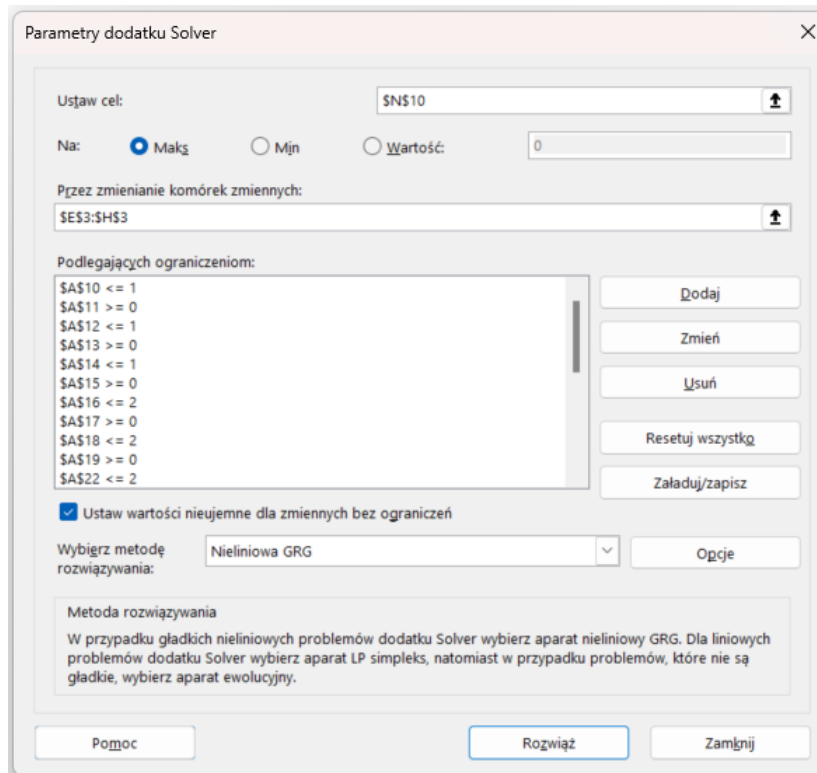
Wszystkie obliczenia przeprowadzono przy wykorzystaniu arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel oraz dodatku Solver. W pierwszym etapie, w poszczególnych komórkach arkusza kalkulacyjnego wprowadzono formuły skonstruowanego modelu matematycznego oraz dane liczbowe dotyczące rozpatrywanego problemu co zobrazowano na Rysunku 4.55.

Warunki ograniczające		Zmienne decyzyjne					L			M		N			
		x ₆	x ₇	x ₈	x ₉										
1	≤	1	1	1	1				Nieprzekraczalny koszt całkowity		38700				
2	≥	0	0	0	0	y _{6:7}	y _{6:8}	y _{6:9}	y _{7:8}	y _{7:9}	y _{8:9}	Koszty utrzymania obiektów rezerwowych	x ₆	9500	
3	≥	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	x ₇	8900		
4	≤	1	1	1	1				Minimalny koszt rezerwy		8900	x ₈	10500		
5	≥	0	0	0	0							x ₉	9800		
6	≤	1	1	1	1	y _{6:7:8}	y _{6:8:9}	y _{7:8:9}	y _{6:7:9}			Zysk z rezerwowania		1,61	
7	≥	0	0	0	0	1	1	1	1			Wsp. gotowości obiektów podstawowych		k _{g1} (t)	0,94
8	≤	1	1	1	1							Wsp. gotowości obiektów rezerwowych		k _{g2} (t)	0,96
9	≥	0	0	0	0									k _{g3} (t)	0,95
10	≤	1	1	1	1									k _{g4} (t)	0,86
11	≥	0	0	0	0									k _{g5} (t)	0,84
12	≤	1	1	1	1									k _{g6} (t)	0,82
13	≥	0	0	0	0									k _{g7} (t)	0,77
14	≤	1	1	1	1									k _{g8} (t)	0,88
15	≥	0	0	0	0									k _{g9} (t)	0,66
16	≤	2	2	2	2										
17	≥	0	0	0	0										
18	≤	2	2	2	2										
19	≥	0	0	0	0										
20	≤	2	2	2	2										
21	≥	0	0	0	0										
22	≤	2	2	2	2										
23	≥	0	0	0	0										
24	≤	3	3	3	3										
25	≥	0	0	0	0										

Rysunek 4.55: Skonstruowany model matematyczny zapisany w poszczególnych komórkach arkusza kalkulacyjnego.

(źródło: opracowanie własne)

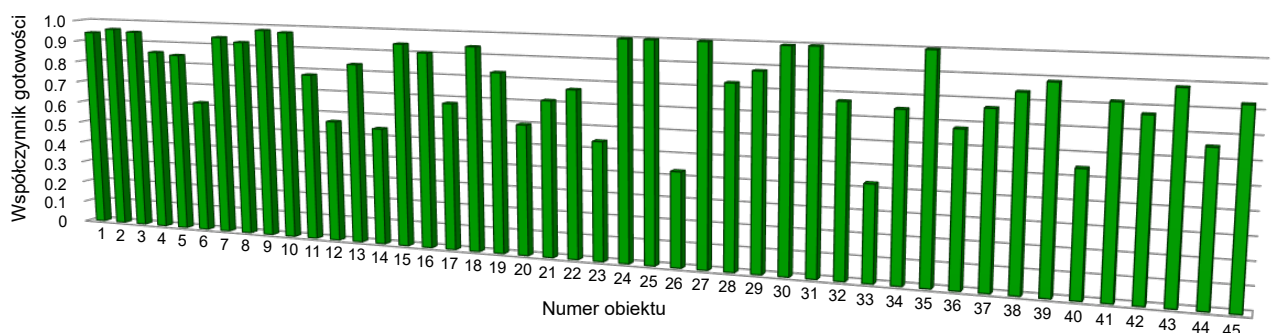
W drugim etapie, korzystając z dodatku Solver przeprowadzono obliczenia. Uzupełnione okno dialogowe dodatku Solver załączone na Rysunku 4.56.



Rysunek 4.56: Okno dialogowe dodatku Solver przygotowane do rozwiązania rozpatrywanego problemu.

(źródło: opracowanie własne)

W Tabeli 4.26 zestawiono wartości współczynników gotowości wyznaczone indywidualnie dla każdego pojazdu. Najniższą wartość współczynnika gotowości uzyskano w przypadku obiektu oznaczonego numerem 26, czego przyczyną było długotrwałe przebywanie w stanie naprawy bieżącej s_6 . Wyniki przeprowadzonych obliczeń zobrazowano na Rysunku 4.57.



Rysunek 4.57: Wartości współczynników gotowości rozpatrywanych środków transportu.

(źródło: opracowanie własne)

Tabela 4.26. Wartości współczynników gotowości pojazdów realizujących zadania na potrzeby poszczególnych kompanii transportowych.

Numer kompanii transportowej (kp)	Numer obiektu	Współczynnik gotowości
1 kp	Obiekt 1	0.941
	Obiekt 2	0.960
	Obiekt 3	0.950
	Obiekt 4	0.856
	Obiekt 5	0.845
2 kp	Obiekt 6	0.620
	Obiekt 7	0.939
	Obiekt 8	0.919
	Obiekt 9	0.981
	Obiekt 10	0.973
3 kp	Obiekt 11	0.778
	Obiekt 12	0.564
	Obiekt 13	0.837
	Obiekt 14	0.542
	Obiekt 15	0.940
4 kp	Obiekt 16	0.904
	Obiekt 17	0.677
	Obiekt 18	0.940
	Obiekt 19	0.828
	Obiekt 20	0.597
5 kp	Obiekt 21	0.712
	Obiekt 22	0.766
	Obiekt 23	0.541
	Obiekt 24	0.998
	Obiekt 25	0.999
6 kp	Obiekt 26	0.429
	Obiekt 27	0.999
	Obiekt 28	0.826
	Obiekt 29	0.882
	Obiekt 30	0.994
7 kp	Obiekt 31	0.995
	Obiekt 32	0.769
	Obiekt 33	0.428
	Obiekt 34	0.748
	Obiekt 35	0.997
8 kp	Obiekt 36	0.678
	Obiekt 37	0.768
	Obiekt 38	0.839
	Obiekt 39	0.885
	Obiekt 40	0.543
9 kp	Obiekt 41	0.817
	Obiekt 42	0.771
	Obiekt 43	0.883
	Obiekt 44	0.656
	Obiekt 45	0.827

W skonstruowanym modelu matematycznym rezerwę stanowiły obiekty wykonujące zadania na potrzeby 9. kompanii oznaczone numerem: 41, 42, 43, 44, które na Rysunku 4.54 oznaczono odpowiednio jako: 6, 7, 8, 9. W obliczeniach rozważono następujące kombinacje:

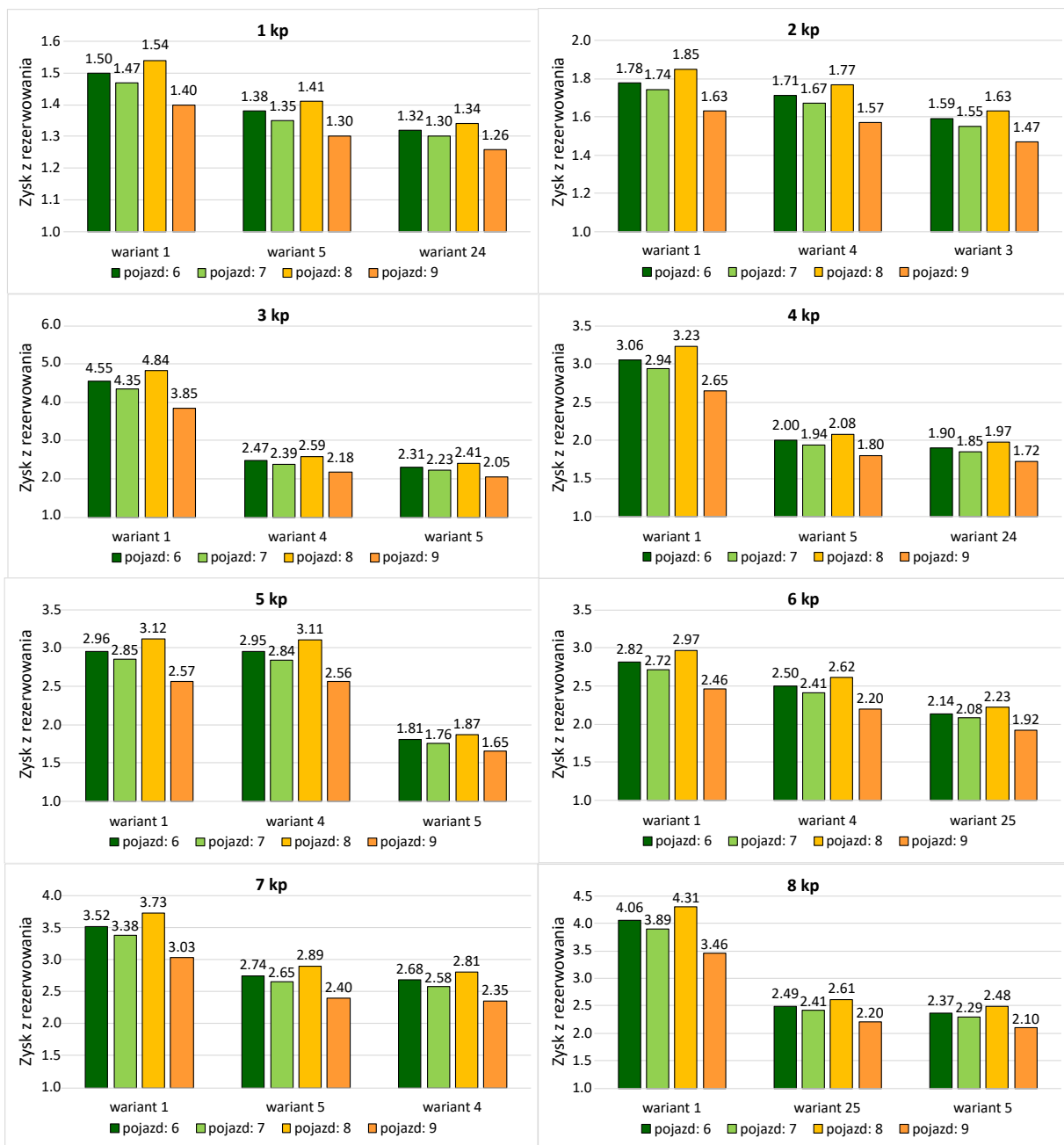
- rezerwowanie jednym pojazdem: {6}, {7}, {8}, {9},
- rezerwowanie dwoma pojazdami: {6,7}, {6,8}, {6,9}, {7,8}, {7,9}, {8,9},
- rezerwowanie trzema pojazdami: {6,7,8}, {6,8,9}, {7,8,9}, {6,7,9},
- rezerwowanie czterema pojazdami: {6,7,8,9}.

Koszty utrzymania pojazdów stanowiących rezerwę zestawiono w Tabeli 4.27.

Tabela 4.27. Koszty utrzymania obiektów stanowiących rezerwę w zależności od możliwych wariantów redundancji.

Sposób rezerwowania	Możliwe kombinacje	Koszt utrzymania obiektów stanowiących rezerwę (PLN),
rezerwowanie jednym pojazdem	{6}	9500
	{7}	8900
	{8}	10500
	{9}	9800
rezerwowanie dwoma pojazdami	{6,7}	18400
	{6,8}	20000
	{6,9}	19300
	{7,8}	19400
	{7,9}	18700
	{8,9}	20300
rezerwowanie trzema pojazdami	{6,7,8}	28900
	{6,8,9}	29800
	{7,8,9}	29200
	{6,7,9}	28200
rezerwowanie czterema pojazdami	{6,7,8,9}	38700

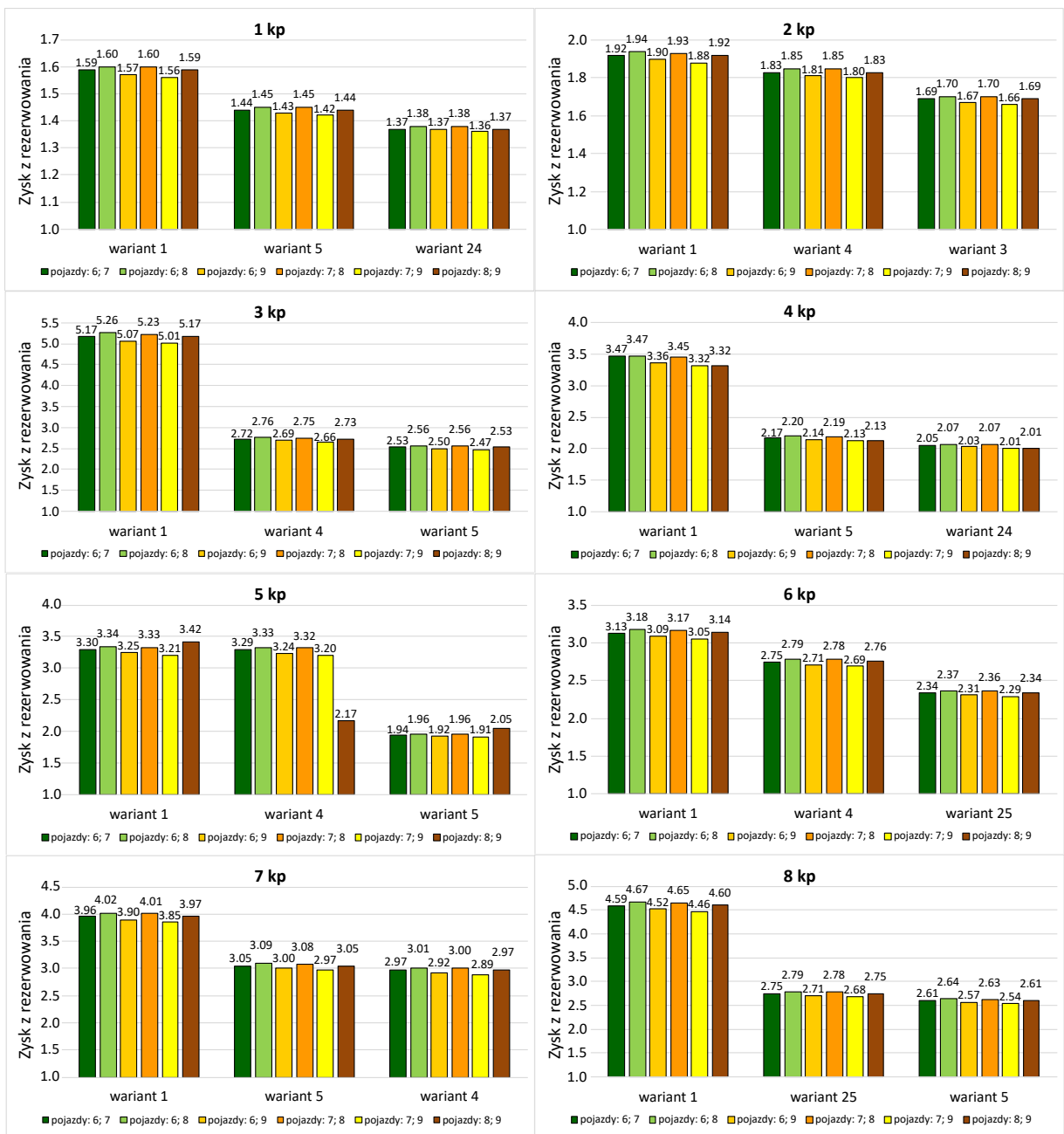
Wyniki przeprowadzonych obliczeń dotyczących zysku z rezerwowania tylko jednym pojazdem przedstawiono na Rysunku 4.58. W odniesieniu do poszczególnych kompanii transportowych wyłoniono trzy warianty zapewniające największy zysk z redundancji.



Rysunek 4.58: Zysk z redundancji jednym pojazdem rezerwowym.

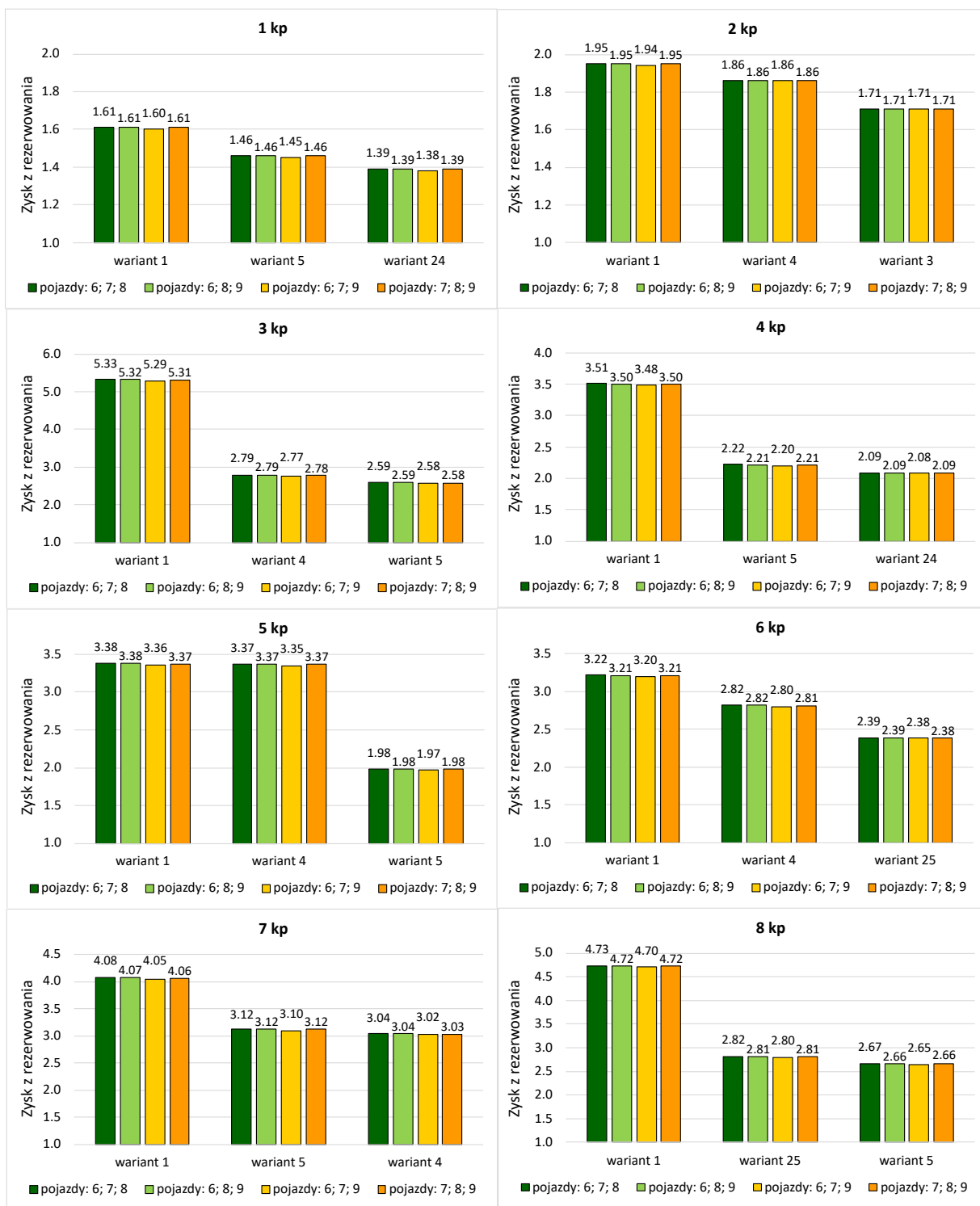
(źródło: opracowanie własne)

Dokonując rezerwowania dwoma pojazdami należy zauważyć, że każda z kombinacji dwóch pojazdów zapewnia bardzo zbliżony lub taki sam zysk z rezerwowania w poszczególnych wariantach, co zobrazowano na Rysunku 4.59. Podobną tendencję można zaobserwować dokonując rezerwowania trzema pojazdami, co przedstawiono na Rysunku 4.60.



Rysunek 4.59: Zysk z redundancji dwoma pojazdami rezerwowymi.

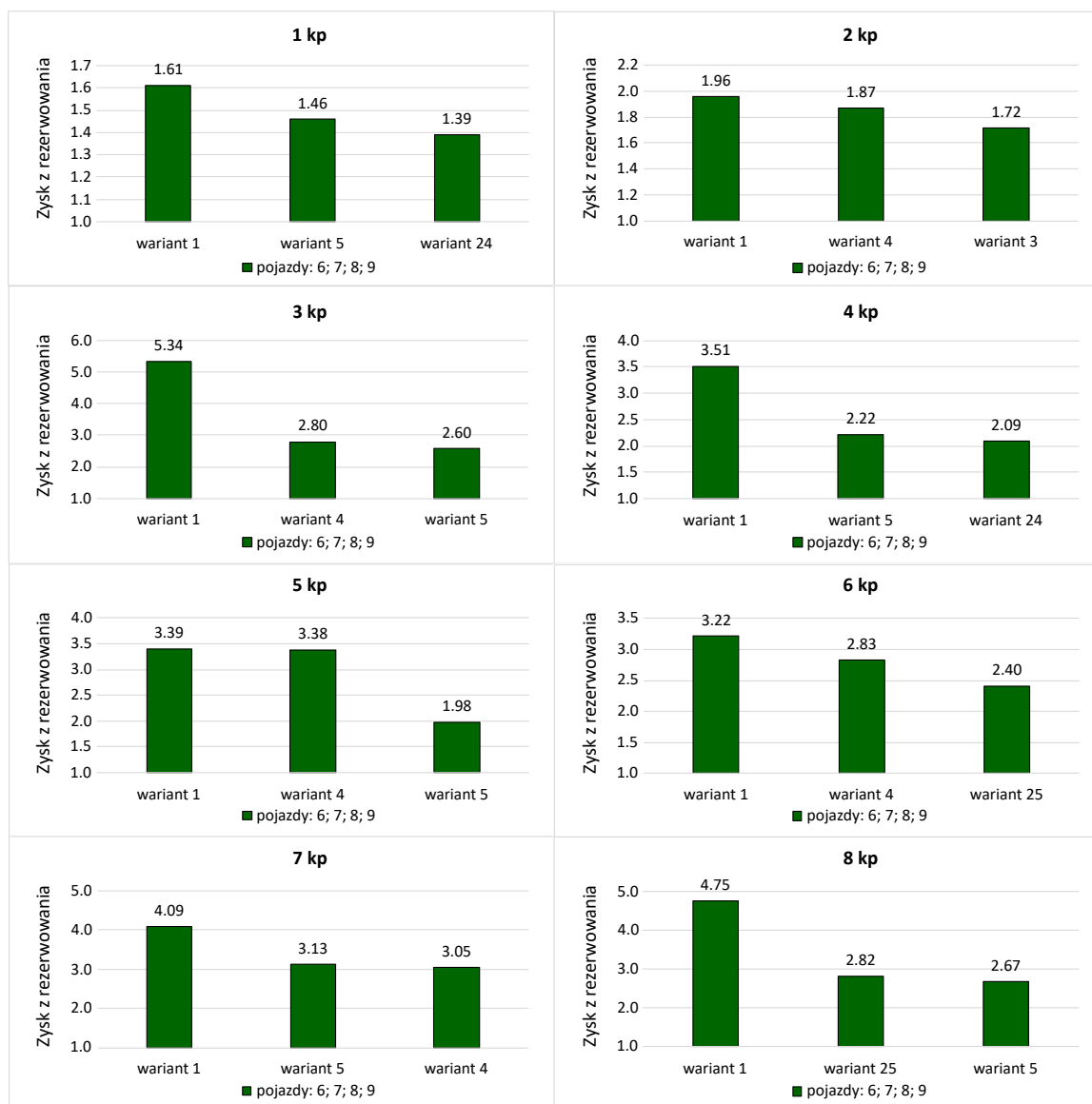
(źródło: opracowanie własne)



Rysunek 4.60: Zysk z redundancji trzema pojazdami rezerwowymi.

(źródło: opracowanie własne)

Wyniki obliczeń, mających na celu wyznaczenie zysku z rezerwowania czterema pojazdami, zilustrowano na Rysunku 4.61. Należy zauważyć, że wariant pierwszy zapewnia uzyskanie maksymalnego zysku z rezerwowania niezależnie od rozpatrywanej kompanii transportowej.



Rysunek 4.61: Zysk z redundancji czterema pojazdami rezerwowymi.
(źródło: opracowanie własne)

Opracowane narzędzie umożliwia również przeprowadzenie symulacji zysku z redundancji w zależności od liczby pojazdów rezerwowych oraz kosztów utrzymania pojazdów stanowiących nadmiar dla każdego spośród rozpatrywanych wariantów oraz każdej kompanii transportowej.

4.8. Uniwersalna metodyka komputerowo wspomaganego postępowania zapewniająca optymalizację procesu decyzyjnego w systemach transportowych

W wyniku przeprowadzonych badań opracowano metodykę postępowania zapewniającą optymalizację procesu decyzyjnego w systemach transportowych. Skonstruowane modele

matematyczne zagregowano w syntetyczny model systemu transportowego, którego integralną część stanowią zaproponowane w niniejszej dysertacji rozwiązania w postaci narzędzi m.in. programów komputerowych wspomagających procesy decyzyjne. Kolejne kroki opracowanej metodyki postępowania obejmują:

- Krok 1.** Zgromadzenie danych empirycznych dotyczących cen zamknięcia akcji rozpatrywanych spółek giełdowych.
- Krok 2.** Wyznaczenie wartości stóp zwrotu z inwestycji.
- Krok 3.** Weryfikacja hipotezy o normalności rozkładu stóp zwrotu.
- Krok 4.** Wyłonienie inwestycji, których rozkład prawdopodobieństwa stóp zwrotu jest zgodny z rozkładem normalnym.
- Krok 5.** Wyznaczenie parametrów rozkładu prawdopodobieństwa stóp zwrotu.
- Krok 6.** Porównanie wartości oczekiwanych stóp zwrotu rozpatrywanych inwestycji.
- Krok 7.** Porównanie wartości odchyłeń standardowych stóp zwrotu rozpatrywanych inwestycji.
- Krok 8.** Określenie rzędu dominacji stochastycznych występujących pomiędzy rozpatrywanymi inwestycjami.
- Krok 9.** Wyznaczenie oraz wizualizacja wartości zysków i strat.
- Krok 10.** Wizualizacja posortowanych wartości stóp zwrotu.
- Krok 11.** Wyłonienie inwestycji zapewniającej maksymalny zysk przy jednoczesnej minimalizacji ryzyka.
- Krok 12.** Zgromadzenie danych empirycznych dotyczących liczby dostawców, liczby odbiorców, kosztów transportu pomiędzy dostawcami i odbiorcami, zasobów dostawców oraz zapotrzebowań odbiorców w ramach rozpatrywanej sieci dystrybucji.
- Krok 13.** Sprawdzenie zbilansowania zagadnienia transportowego.
- Krok 14.** Wyznaczenie bazowego rozwiązania dopuszczalnego za pomocą metod: kąta północno-zachodniego, minimalnego elementu w wierszu, minimalnego elementu w macierzy, VAM.
- Krok 15.** Wyznaczenie liczby elementów bazowych dla każdej z rozpatrywanych metod.
- Krok 16.** Sprawdzenie degeneracji rozwiązań dopuszczalnych dla każdej z rozpatrywanych metod.
- Krok 17.** Obliczenie i porównanie liczby iteracji oraz wartości funkcji celu (kosztu transportu) dla poszczególnych rozwiązań dopuszczalnych.
- Krok 18.** Zastosowanie metody potencjałów.
- Krok 19.** Wyznaczenie wartości kosztów pośrednich.
- Krok 20.** Obliczenie wskaźników optymalności.
- Krok 21.** Skonstruowanie cyklu oraz wyznaczenie nowego rozwiązania dopuszczalnego w przypadku uzyskania dodatnich wartości wskaźników optymalności.

-
- Krok 22.** Obliczenie wartości funkcji celu (kosztu transportu) w przypadku uzyskania nie-dodatnich wartości wskaźników optymalności.
- Krok 23.** Wizualizacja wartości kosztu transportu dla każdego bazowego rozwiązania dopuszczalnego.
- Krok 24.** Wyznaczenie optymalnego pod względem całkowitej długości przebytej trasy sposobu dystrybucji środków materiałowych.
- Krok 25.** Obliczenie wartości całkowitego zużycia paliwa oraz emisji CO₂ w zależności od długości przebytej trasy.
- Krok 26.** Wizualizacja wartości całkowitego zużycia paliwa oraz emisji CO₂ dla każdego bazowego rozwiązania dopuszczalnego.
- Krok 27.** Wskazanie optymalnego pod względem zużycia paliwa oraz emisji CO₂ sposobu dystrybucji środków materiałowych.
- Krok 28.** Wyznaczenie bazowego rozwiązania dopuszczalnego zagadnienia transportowego za pomocą metod: MDED, KSAM, VAM, minimalnego elementu w macierzy, kąta północno-zachodniego.
- Krok 29.** Obliczenie kosztu transportu odpowiadającego bazowym rozwiązaniom dopuszczalnym wyznaczonym za pomocą metod: MDED, KSAM, VAM, minimalnego elementu w macierzy, kąta północno-zachodniego.
- Krok 30.** Wskazanie optymalnego pod względem kosztu transportu planu przewozu środków materiałowych.
- Krok 31.** Zgromadzenie danych empirycznych dotyczących liczby stanowisk naprawczych oraz wartości powiązań występujących pomiędzy poszczególnymi stanowiskami.
- Krok 32.** Wyłonienie pary stanowisk najbardziej powiązanych.
- Krok 33.** Rozmieszczenie wybranej pary stanowisk w sąsiednich wierzchołkach siatki trójkątów równobocznych.
- Krok 34.** Obliczenie sumy intensywności powiązań pomiędzy stanowiskami rozmieszczonymi oraz nierozmieszczonymi.
- Krok 35.** Wybór kolejnego stanowiska o największej intensywności powiązań oraz określenie możliwych wariantów jego miejsc lokalizacji.
- Krok 36.** Obliczenie wartości funkcji celu (sumy iloczynów ciężarów przewożonych materiałów i odległości) dla wszystkich potencjalnych miejsc lokalizacji stanowiska o największej intensywności powiązań.
- Krok 37.** Rozlokowanie stanowiska o największej intensywności powiązań w miejscu odpowiadającym minimalnej wartości funkcji celu.
- Krok 38.** Określenie kolejności rozmieszczania oraz miejsc lokalizacji kolejnych stanowisk o największej intensywności powiązań.

-
- Krok 39.** Wskazanie optymalnego pod względem wielkości pracy transportowej sposobu rozlokowania w siatce trójkątów wszystkich stanowisk naprawczych.
- Krok 40.** Wizualizacja optymalnego sposobu zagospodarowania przestrzeni.
- Krok 41.** Zgromadzenie danych empirycznych dotyczących liczby zdatnych oraz niezdatnych pojazdów.
- Krok 42.** Wizualizacja empirycznej funkcji niezawodności.
- Krok 43.** Wizualizacja empirycznej funkcji zawodności.
- Krok 44.** Wizualizacja empirycznej funkcji intensywności uszkodzeń.
- Krok 45.** Wizualizacja empirycznej funkcji wiodącej (skumulowanej intensywności uszkodzeń).
- Krok 46.** Obliczenie oczekiwanego czasu zdatności pojazdów przy wykorzystaniu metod całkowania numerycznego tj. kwadratury prostokątów, kwadratury trapezów, kwadratury Simpsona, złożonej kwadratury trapezów, złożonej kwadratury Simpsona.
- Krok 47.** Zgromadzenie danych empirycznych dotyczących czasu zdatności oraz czasu niezdatności pojazdów.
- Krok 48.** Wyznaczenie średniego czasu pomiędzy uszkodzeniami oraz średniego czasu naprawy pojazdów.
- Krok 49.** Określenie liczby przedziałów klasowych za pomocą metody Sturges'a.
- Krok 50.** Wykorzystanie testu zgodności χ^2 Pearson'a.
- Krok 51.** Estymacja parametrów rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych tj. czasu zdatności oraz czasu niezdatności.
- Krok 52.** Wizualizacja funkcji rozkładu prawdopodobieństwa czasu zdatności oraz czasu niezdatności.
- Krok 53.** Wizualizacja funkcji gęstości odnowy.
- Krok 54.** Obliczenie oczekiwanej liczby odnow oraz oczekiwanej liczby uszkodzeń.
- Krok 55.** Wyznaczenie wartości stacjonarnego współczynnika niegotowości.
- Krok 56.** Wizualizacja funkcji gotowości.
- Krok 57.** Wyznaczenie wartości współczynnika gotowości technicznej.
- Krok 58.** Zgromadzenie danych empirycznych dotyczących: liczby pojazdów podstawowych i rezerwowych, liczby stanów eksploatacyjnych stanowiących przestrzeń fazową, czasu przebywania pojazdów w poszczególnych stanach eksploatacyjnych, kosztu utrzymania pojazdów stanowiących rezerwę.
- Krok 59.** Wyodrębnienie z przestrzeni fazowej stanów gotowości i niegotowości pojazdów.
- Krok 60.** Określenie możliwych struktur niezawodnościowych systemu transportowego.
- Krok 61.** Określenie możliwych kombinacji redundancji w zależności od liczby pojazdów rezerwowych.
- Krok 62.** Obliczenie wartości współczynnika gotowości rozpatrywanych pojazdów.

-
- Krok 63.** Wizualizacja wartości współczynnika gotowości indywidualnie dla każdego rozpatrywanego pojazdu.
- Krok 64.** Obliczenie wartości współczynnika gotowości systemu podstawowego tj. bez elementów nadmiarowych.
- Krok 65.** Obliczenie wartości współczynnika gotowości systemu z uwzględnieniem elementów nadmiarowych.
- Krok 66.** Określenie wartości dopuszczalnego budżetu (całkowitego kosztu utrzymania pojazdów stanowiących rezerwę).
- Krok 67.** Obliczenie wartości zysku z redundancji z uwzględnieniem wartości dopuszczalnego budżetu.
- Krok 68.** Wskazanie struktury niezawodnościowej systemu zapewniającej maksymalny zysk z redundancji.
- Krok 69.** Wskazanie optymalnego pod względem zysku z redundancji sposobu rezerwowania systemu transportowego z jednoczesnym uwzględnieniem ograniczeń finansowych.
- Krok 70.** Wizualizacja wartości zysku z redundancji w zależności od kosztu utrzymania pojazdów rezerwowych dla każdej z rozpatrywanych struktur niezawodnościowych.

Rozdział 5

Podsumowanie oraz kierunki dalszych badań

Celem niniejszej rozprawy doktorskiej było opracowanie metody modelowania i optymalizacji strategii postępowania wspierających procesy decyzyjne w obszarze transportu z uwzględnieniem niezawodności obiektów. Zasadniczą część dysertacji stanowił opis metody modelowania i optymalizacji strategii postępowania w systemach transportowych oraz zaproponowanych informatycznych narzędzi wspomagających procesy decyzyjne. W wyniku przeprowadzonych badań opracowano uniwersalną metodykę postępowania zapewniającą optymalizację procesu decyzyjnego w systemach transportowych.

Opracowanie metody modelowania i optymalizacji strategii postępowania wspierających procesy decyzyjne w obszarze transportu z uwzględnieniem niezawodności obiektów pozwoliło na sformułowanie następujących wniosków:

- skonstruowane modele matematyczne, będące składowymi zaproponowanej uniwersalnej metodyki postępowania, zostały opracowane w sposób umożliwiający wyznaczenie wartości zmiennych decyzyjnych oraz charakterystyk niezawodnościowych zarówno liczbowych jak i funkcyjnych,
- zbudowany w oparciu o dominacje stochastyczne model oceny decyzji inwestycyjnych umożliwia wyłonienie inwestycji zapewniającej maksymalny zysk przy jednoczesnej minimalizacji ryzyka,
- zbudowany decyzyjny model sterowania procesem zaopatrzenia umożliwia wyznaczenie optymalnego pod względem kosztu, zużycia paliwa oraz emisji CO₂ planu przewozu środków materiałów,
- zbudowany w oparciu o metodę Blocha-Schmigalli model procesu eksploatacji umożliwia optymalizację organizacji procesu naprawy obiektów technicznych,
- zbudowany przy wykorzystaniu metod całkowania numerycznego model procesu eksploatacji umożliwia wyznaczenie oczekiwanego czasu zdatności obiektów technicznych,
- zbudowany w oparciu o transformatę Laplace'a model procesu eksploatacji umożliwia wyznaczenie gotowości systemu transportowego,
- zbudowany model oceny gotowości systemu transportowego umożliwia wyłonienie spo-

sobu rezerwowania zapewniającego maksymalny zysk z redundancji przy jednoczesnym uwzględnieniu ograniczeń finansowych,

- opracowana metodyka postępowania oraz narzędzia informatyczne umożliwiają wspomaganie podejmowania decyzji w systemach transportowych,
- uniwersalność opracowanej metodyki postępowania zapewnia możliwość zastosowania skonstruowanych modeli do analizy, oceny i modelowania procesu eksploatacji dowolnych obiektów technicznych.

Słusznym kierunkiem przyszłych badań, mających na celu poszerzenie zakresu zastosowań opracowanej metodyki postępowania oraz usprawnienie możliwości jej wykorzystania w obszarach, które omówiono w niniejszej dysertacji, będzie opracowanie optymalnej strategii sterowania procesem eksploatacji w oparciu o algorytmy optymalizacji inspirowane biologicznie. Jako przykłady można wskazać algorytmy genetyczne, mrówkowe, nietoperzy lub roju owadów. Należy również zastanowić się nad opracowaniem rozwiązań hybrydowych łączących np. algorytmy mrówkowe oraz roju owadów, które umożliwiłyby rozwiązywanie problemów decyzyjnych dotyczących dużych zbiorów danych. W dążeniu do zapewnienia szybszej i łatwiejszej analizy oraz możliwości rozpatrywania różnych wariantów decyzyjnych, planowanym kierunkiem dalszych prac będzie opracowanie informatycznych narzędzi optymalizacyjnych, wykorzystujących algorytmy inspirowane biologicznie, w celu zwiększenia efektywności procesu eksploatacji.

Bibliografia

- [1] Żurek, J., Ziółkowski, J., Szkutnik-Rogoż, J. (2019). *Stochastic dominance application for optimal transport company selection*, Conference: Computational Technologies in Engineering (TKI'2018): Proceedings of the 15th Conference on Computational Technologies in Engineering, 1–9, DOI: 10.1063/1.5092077
- [2] Żurek, J., Małachowski, J., Ziółkowski, J., Szkutnik-Rogoż, J. (2020). *Reliability Analysis of Technical Means of Transport*, Applied Sciences, 10(9), 1–17, DOI: 10.3390/app10093016
- [3] Małachowski, J., Ziółkowski, J., Szkutnik-Rogoż, J., Lęgas, A., Oszczypała, M. (2020). *Application of the Bloch-Schmigalla Method to Optimize the Organization of the Process of Repairing Unmanned Ground Vehicles*, Advances in Science and Technology Research Journal, 14(3), 39–48, DOI: 10.12913/22998624/122605
- [4] Szkutnik-Rogoż, J., Ziółkowski, J., Małachowski, J., Oszczypała, M. (2021). *Mathematical Programming and Solution Approaches for Transportation Optimisation in Supply Network*, Energies, 14(21), 7010, 1–32, DOI: 10.3390/en14217010
- [5] Szkutnik-Rogoż, J., Małachowski, J., Ziółkowski, J. (2023). *An innovative computational algorithm for modelling technical readiness coefficient: A case study in automotive industry*, Computers & Industrial Engineering, 176(2023), 108942, 1–19, DOI: 10.1016/j.cie.2022.108942
- [6] Szkutnik-Rogoż, J., Małachowski, J. (2023). *Optimization programming tools supporting supply chain management*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, 71(3), e145570, 1–14, DOI: 10.24425/bpasts.2023.145570
- [7] Glinka, M. (2016). *Elementy badań operacyjnych w transporcie*, Wydanie III uzupełnione i poprawione; Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. K. Pułaskiego, Radom, Polska.
- [8] <https://www.pte.pl/baza-wiedzy/noblisci>
(dostęp: 20.12.2023 r.)
- [9] Hitchcock, F. (1941). *The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities*, Journal of Mathematics and Physics, 20(1-4), 224–230. <http://doi.org/10.1002/sapm1941201224>
- [10] Dantzig, G. (1951). *Application of the Simplex Method to a Transportation Problem*, Activity Analysis of Production and Allocation, Koopmans, T.C., Ed.; John Wiley & Sons: New York, USA

-
- [11] Charnes, A., Cooper, W., Henderson, A. (1953). *An Introduction to Linear Programming*, John Wiley & Sons: New York, USA
- [12] Ozkok, B. (2020). *An iterative algorithm to solve a linear fractional programming problem*, Computers & Industrial Engineering, 140, 106234, <http://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106234>
- [13] Venkatachalapathy, M., Pandiarajan, R., Ganeshkumar, S. (2020). *A special type of solving transportation problems using generalized quadratic fuzzy number*, International Journal of Scientific & Technology Research, 9(2), 6344–6348.
- [14] Kuiteing, A., Marcotte, P., Savard, G. (2018). *Pricing and revenue maximization over a multi-commodity transportation network: The nonlinear demand case*, Computational Optimization and Applications, 71, 641–671, <http://doi.org/10.1007/s10589-018-0032-0>
- [15] Cosma, O., Pop, P., Dănciulescu, D. (2020), *A novel matheuristic approach for a two-stage transportation problem with fixed costs associated to the routes*, Computers & Operations Research, 118, 104906, <http://doi.org/10.1016/j.cor.2020.104906>
- [16] Selech, J., Andrzejczak, K. (2020). *An aggregate criterion for selecting a distribution for times to failure of components of rail vehicles*, Maintenance and Reliability, 22(1), 102–111, <http://doi.org/10.17531/ein.2020.1.12>
- [17] Andrzejczak, K., Młyńczak, M., Selech, J. (2018). *Poisson-distributed failures in the predicting of the cost of corrective maintenance*, Maintenance and Reliability, 20(4), 602–609, <http://doi.org/10.17531/ein.2018.4.11>
- [18] Entrialgo, J., García, M., Díaz, J., García, J., García, D. (2021). *Modelling and simulation for cost optimization and performance analysis of transactional applications in hybrid clouds*, Simulation Modelling Practice and Theory, 109, 102311, <http://doi.org/10.1016/j.simpat.2021.102311>
- [19] Mancini, S., Gansterer, M. (2021). *Vehicle routing with private and shared delivery locations*, Computers & Operations Research, 133, 105361, <http://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105361>
- [20] Loch, G., da Silva, A. (2014). *A computational study on the number of iterations to solve the transportation problem*, Applied Mathematical Sciences, 8(92), 4579–4583, <http://doi.org/10.12988/ams.2014.46435>
- [21] Mhlanga, A., Nduna, I., Matarise, D., Machisvo, A. (2014). *Innovative application of Dantzig's North–West Corner Rule to solve a transportation problem*, International Journal of Education and Research, 2(2), 1–12
- [22] Karagul, K., Sahin, Y. (2020). *A novel approximation method to obtain initial basic feasible solution of transportation problem*, Journal of King Saud University - Engineering Sciences, 32(3), 211–218, <http://doi.org/10.1016/j.jksues.2019.03.003>
- [23] De França Aguiar, G., De Cássia Xavier Cassins Aguiar, B., Wilhelm, V. (2015). *New methodology to find initial solution for transportation problems: A case study with fuzzy parameters*, Applied Mathematical Sciences, 9(19), 915–927, <http://doi.org/10.12988/ams.2015.4121018>
- [24] Korukoğlu, S., Ballı, S. (2011). *An improved Vogel's approximation method for the*

-
- transportation problem*, Mathematical and Computational Applications, 16(2), 370–381, <http://doi.org/10.3390/mca16020370>
- [25] Das, U., Babu, A., Khan, A., Helal, A., Uddin, D. (2014). *Logical development of Vogel's approximation method (LD-VAM): An approach to find basic feasible solution of transportation problem*, International Journal of Scientific & Technology Research, 3(2), 42–48
- [26] Ahmed, M., Khan, A., Uddin, M., Ahmed, F. (2016). *A new approach to solve transportation problems*, Open Journal of Optimization, 5(1), 22–30, <http://doi.org/10.4236/ojop.2016.51003>
- [27] Kirca, O., Şatir, A. (1990). *A heuristic for obtaining an initial solution for the transportation problem*, Journal of the Operational Research Society, 41(9), 865–871, <http://doi.org/10.1057/jors.1990.124>
- [28] Ziólkowski, J., Oszczyńska, M., Małachowski, J., Szkutnik-Rogoż, J. (2021). *Use of artificial neural networks to predict fuel consumption on the basis of technical parameters of vehicles*, Energies, 14(9), 2639, <http://doi.org/10.3390/en14092639>
- [29] Azucena, J., Alkhaleel, B., Liao, H., Nachtmann, H. (2021). *Hybrid simulation to support interdependence modeling of a multimodal transportation network*, Simulation Modelling Practice and Theory, 107, 102237, <http://doi.org/10.1016/j.simpat.2020.102237>
- [30] Mathirajan, M., Meenakshi, B. (2004). *Experimental analysis of some variants of Vogel's approximation method*, Asia-Pacific Journal of Operational Research, 21(4), 447–462, <http://doi.org/10.1142/S0217595904000333>
- [31] Juman, Z., Hoque, M. (2015). *An efficient heuristic to obtain a better initial feasible solution to the transportation problem*, Applied Soft Computing, 34, 813–826, <http://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.05.009>
- [32] Imam, T., Elsharawy, G., Gomah, M., Samy, I. (2009). *Solving transportation problem using object-oriented model*, International Journal of Computer Science and Network Security, 9(2), 353–361
- [33] Pallavi, P., Lakshmi, R. (2015). *A Mat Lab oriented approach to solve the transportation problem*, International Journal of Advanced Research Foundation, 2(11), 1–4
- [34] Appati, J., Gogovi, G., Fosu, G. (2015). *MATLAB implementation of Vogel's approximation and the modified distribution methods*, International Journal of Advanced Computer Technology, 4(1), 1449–1453
- [35] Ghadle Kirtiwant, P., Muley Yogesh, M. (2015). *New approach to solve assignment problem using MATLAB*, International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science, 4(1), 36–39
- [36] Sengamalaselvi, D. (2017). *Solving transportation problem by using MATLAB*, International Journal of Engineering Sciences & Research Technology, 6, 374–381, <http://doi.org/10.5281/zenodo.259588>
- [37] Juman, Z., Hoque, M. (2014). *A heuristic solution technique to attain the minimal total cost bounds of transporting a homogeneous product with varying demands and supplies*, European Journal of Operational Research, 239(1), 146–156, <http://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.05.004>

-
- [38] Mandal, J., Goswami, A., Wang, J., Tiwari, M. (2020). *Optimization of vehicle speed for batches to minimize supply chain cost under uncertain demand*, Information Sciences 515, 26–43, <http://doi.org/10.1016/j.ins.2019.12.009>
- [39] Tamannaeei, M., Rasti-Barzoki, M. (2019). *Mathematical programming and solution approaches for minimizing tardiness and transportation costs in the supply chain scheduling problem*, Computers & Industrial Engineering, 127, 643–656, <http://doi.org/10.1016/j.cie.2018.11.003>
- [40] Sagratella, S., Schmidt, M., Sudermann-Merx, N. (2020). *The noncooperative fixed charge transportation problem*, European Journal of Operational Research, 284(1), 373–382, <http://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.12.024>
- [41] Pielecha, J., Skobiej, K., Kurtyka, K. (2020). *Exhaust emissions and energy consumption analysis of conventional, hybrid, and electric vehicles in real driving cycles*, Energies, 13(23), 6423, <http://doi.org/10.3390/en13236423>
- [42] Berling, P., Martínez-De-Albéniz, V. (2016). *Dynamic speed optimization in supply chains with stochastic demand*, Transportation Science, 50(3), 1114–1127, <http://doi.org/10.1287/trsc.2014.0561>
- [43] Bougofa, M., Taleb-Berrouane, M., Bouafia, A., Baziz, A., Kharzi, R., Bellaouar, A. (2021). *Dynamic availability analysis using dynamic Bayesian and evidential networks*, Process Safety and Environmental Protection, 153, 486–499, <http://doi.org/10.1016/j.psep.2021.07.003>
- [44] Bai, S., Jia, X., Cheng, Z., Guo, B., Zhao, Q., Zhang, X. (2022). *Operation optimization model for warm standby system based on nonperiodic and imperfect multiple active switching policy*, Computers & Industrial Engineering, 167, 108001, <http://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108001>
- [45] Fernandez, A. (2022). *Planning reliability demonstration tests with limited expected risks*, Computers & Industrial Engineering, 165, 107918, <http://doi.org/10.1016/j.cie.2021.107918>
- [46] Yeu-Shiang, H., Jyh-Wen, H., Wei-Yu, K. (2022). *Availability and reliability of information transmission for supply chain coordination with demand information sharing*, Computers & Industrial Engineering, 172, 108642, <http://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108642>
- [47] Jing, Z., Xian, Z., Yanbo, S., Qingan, Q. (2022). *Joint optimization of condition-based maintenance and spares inventory for a series-parallel system with two failure modes*, Computers & Industrial Engineering, 168, 108094, <http://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108094>
- [48] Reza, A., Amirhossein, S. (2022). *A signature-based approach for reliability modeling and maintenance optimization of a coherent system*, Computers & Industrial Engineering, 171, 108465, <http://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108465>
- [49] Fang, C., Cui, L. (2021). *Reliability evaluation for balanced systems with auto-balancing mechanisms*, Reliability Engineering & System Safety, 213, 107780, <http://doi.org/10.1016/j.ress.2021.107780>
- [50] Tucker, E., Daskin, M. (2022). *Pharmaceutical supply chain reliability and effects on drug shortages*, Computers & Industrial Engineering, 169, 108258, <http://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108258>
- [51] Rykov, V., Kozyrev, D., Filimonov, A., Ivanova, N. (2020). *On reliability function of a k-out-of-n*

-
- system with general repair time distribution*, Probability in the Engineering and Informational Sciences, 35(4), 885–902, <http://doi.org/10.1017/S0269964820000285>
- [52] Hayashi, M., Abe, T. (2011). *Efficient reliability approximation method for traffic-path-based network*, IEEE Transactions on Reliability, 60(2), 460–469, <http://doi.org/10.1109/TR.2011.2135710>
- [53] Xie, F., Castagliola, P., Sun, J., Tang, A., Hu, X. (2022). *A one-sided adaptive truncated exponentially weighted moving average scheme for time between events*, Computers & Industrial Engineering, 168, 108052, <http://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108052>
- [54] Elshoubary, E., Shaeer, Z. (2021). *Performance study of a complex system with three subsystems in series configuration using reduction method and copula distribution*, International Journal of Computational Intelligence in Control, 13(2), 19–28
- [55] Rykov, V., Ivanova, N., Kozyrev, D. (2021). *Application of decomposable semi-regenerative processes to the study of k-out-of-n systems*, Mathematics, 9(16), 1933, <http://doi.org/10.3390/math9161933>
- [56] Yang, D.-Y., Wu, C.-H. (2021). *Evaluation of the availability and reliability of a standby repairable system incorporating imperfect switchovers and working breakdowns*, Reliability Engineering & System Safety, 207, 107366, <http://doi.org/10.1016/j.ress.2020.107366>
- [57] Miyaguchi, T., Uneyama, T., Akimoto, T. (2019). *Brownian motion with alternately fluctuating diffusivity: Stretched-exponential and power-law relaxation*, Physical Review E, 100(1), 012116, <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.012116>
- [58] Duran, O., Aguilar, J., Capaldo, A., Arata, A. (2021). *Fleet resilience: evaluating maintenance strategies in critical equipment*, Applied Sciences, 11(1), 38, <http://doi.org/10.3390/app11010038>
- [59] Li, X., Zhao, X., Pu, W., Chen, P., Liu, F., He, Z. (2019). *Optimal decisions for operations management of BDAR: A military industrial logistics data analytics perspective*, Computers & Industrial Engineering, 137, 106100, <http://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106100>
- [60] Moosavi, S., Yuen, C., Yap, S., Onn, C. (2020). *Simulation-Based Sensitivity Analysis for Evaluating Factors Affecting Bus Service Reliability: A Big and Smart Data Implementation*, IEEE Access, 8, 201937–201955, <http://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3036285>
- [61] Adjetey-Bahun, K., Birregah, B., Châtelet, E., Planchet, J. (2016). *A model to quantify the resilience of mass railway transportation systems*, Reliability Engineering & System Safety, 153, 1–14, <http://doi.org/10.1016/j.ress.2016.03.015>
- [62] Ahmed, S., Dey, K. (2020). *Resilience modeling concepts in transportation systems: a comprehensive review based on mode, and modeling techniques*, Journal of Infrastructure Preservation and Resilience, 1(1), 8, <http://doi.org/10.1186/s43065-020-00008-9>
- [63] Hosseini, A., Pishvaei, M. (2021). *Extended computational formulations for tolerance-based sensitivity analysis of uncertain transportation networks*, Expert Systems with Applications, 183, 115252, <http://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.115252>
- [64] Yeh, C.-T., Lin, Y.-K., Yeng, L.C.-L., Huang, P.-T. (2021). *Reliability evaluation of a multistate*

-
- railway transportation network from the perspective of a travel agent*, Reliability Engineering & System Safety, 214, 107757, <http://doi.org/10.1016/j.ress.2021.107757>
- [65] Gu, Y., Fu, X., Liu, Z., Xu, X., Chen, A. (2020). *Performance of transportation network under perturbations: Reliability, vulnerability, and resilience*, Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 133, 101809, <http://doi.org/10.1016/j.tre.2019.11.003>
- [66] Chow, A., Su, Z., Liang, E., Zhong, R. (2021). *Adaptive signal control for bus service reliability with connected vehicle technology via reinforcement learning*, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 129, 103264, <http://doi.org/10.1016/j.trc.2021.103264>
- [67] Wan, C., Yang, Z., Zhang, D., Yan, X., Fan, S. (2018). *Resilience in transportation systems: a systematic review and future directions*, Transport Reviews, 38(4), 479–498, <http://doi.org/10.1080/01441647.2017.1383532>
- [68] Fałdziński, M., Osińska, M., Zalewski, W. (2021). *Extreme value theory in application to delivery delays*, Entropy, 23(7), 788, <http://doi.org/10.3390/e23070788>
- [69] Barabino, B., Di Francesco, M. (2021). *Diagnosis of Irregularity Sources by Automatic Vehicle Location Data*, IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine, 13(2), 152–165, <http://doi.org/10.1109/MITS.2018.2889713>
- [70] Liang, S., He, S., Zhang, H., Ma, M. (2021). *Optimal holding time calculation algorithm to improve the reliability of high frequency bus route considering the bus capacity constraint*, Reliability Engineering & System Safety, 212, 107632, <http://doi.org/10.1016/j.ress.2021.107632>
- [71] Xiong, X., Sha, J., Jin, L. (2021). *Optimizing coordinated vehicle platooning: An analytical approach based on stochastic dynamic programming*, Transportation Research Part B: Methodological, 150, 482–502, <http://doi.org/10.1016/j.trb.2021.06.009>
- [72] Isaac, N., Saha, A. (2021). *Analysis of refueling behavior of hydrogen fuel vehicles through a stochastic model using Markov Chain Process*, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 141, 110761, <http://doi.org/10.1016/j.rser.2021.110761>
- [73] Żurek, J., Zieja, M., Ziółkowski, J., Borucka, A. (2020). *Vehicle operation process analysis using the Markov processes*, In Proceedings of the 29th European Safety and Reliability Conference, ESREL 2019, Hannover, 2598–2605, http://doi.org/10.3850/978-981-11-2724-3_0652-cd
- [74] Yi, H., Cui, L., Balakrishnan, N. (2021). *New reliability indices for first- and second-order discrete-time aggregated semi-Markov systems with an application to TT&C system*, Reliability Engineering & System Safety, 215, 107882, <http://doi.org/10.1016/j.ress.2021.107882>
- [75] Hogdahl, J., Bohlin, M., Froidh, O. (2019). *A combined simulation-optimization approach for minimizing travel time and delays in railway timetables*, Transportation Research Part B: Methodological, 126, 192–212, <http://doi.org/10.1016/j.trb.2019.04.003>
- [76] Tumsekali, E., Ayyildiz, E., Taskin, A. (2021). *Interval valued intuitionistic fuzzy AHP-WASPAS based public transportation service quality evaluation by a new extension of SERVQUAL Model: P-SERVQUAL 4.0*, Expert Systems with Applications, 186, 115757, <http://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.115757>

-
- [77] Ghader, S., Darzi, A., Zhang, L. (2019). *Modeling effects of travel time reliability on mode choice using cumulative prospect theory*, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 108, 245–254, <http://doi.org/10.1016/j.trc.2019.09.014>
- [78] Moosavi, S., Ismail, A., Yuen, C. (2020). *Using simulation model as a tool for analyzing bus service reliability and implementing improvement strategies*, PLoS ONE, 15(5), e0232799, <http://doi.org/10.1371/journal.pone.0232799>
- [79] Quirk, J., Saposnik, R. (1962). *Admissibility and Measurable Utility Functions*, Review of Economic Study, 29(2), 140–146, <http://doi.org/10.2307/2295819>
- [80] Hadar J., Russel J. (1969). *Rules of Ordering Uncertain Prospects*, American Economic Review, 59(1), 25–34
- [81] Whitmore, G. (1970). *Third-degree stochastic dominance*, The American Economic Review, 60(3), 457–459
- [82] Manski, C., Tetenov, A. (2023). *Statistical decision theory respecting stochastic dominance*, Japanese Economic Review, 74(4), 447–469, <http://doi.org/10.1007/s42973-023-00145-2>
- [83] Post, T. (2003). *Empirical tests for stochastic dominance efficiency*, The Journal of Finance, 58(5), 1905–1931, <http://www.jstor.org/stable/3648178>
- [84] Barrett, G., Stephen, D. (2003). *Consistent tests for stochastic dominance*, Econometrica, 71(1), 71–104, <http://doi.org/10.1111/1468-0262.00390>
- [85] Cho, Y., Linton, O., Whang, Y., W. (2007). *Are there Monday effects in stock returns: A stochastic dominance approach*, Journal of Empirical Finance, 14(5), 736–755, <http://doi.org/10.1016/j.jempfin.2007.02.001>
- [86] Delgado, M., Farinas, J., Ruano, S. (2002). *Firm productivity and export markets: a non-parametric approach*, Journal of international Economics, 57(2), 397–422, [http://doi.org/10.1016/S0022-1996\(01\)00154-4](http://doi.org/10.1016/S0022-1996(01)00154-4)
- [87] Donald, S., Hsu, Y. (2014). *Improving the power of tests of stochastic dominance*, Econometric Reviews, 35(4), 553–585, <http://doi.org/10.1080/07474938.2013.833813>
- [88] Mroua, M., Wong, W., Abid, F. (2017). *Optimal diversification, stochastic dominance, and sampling error*, American Journal of Business, 32(1), 58–79, <https://dx.doi.org/10.1108/AJB-04-2015-0014>
- [89] Abid, F., Pui-Lam, L., Mroua, M., Wong, W. (2014). *International Diversification Versus Domestic Diversification: Mean-Variance Portfolio Optimization and Stochastic Dominance Approaches*, Journal of Risk and Financial Management, 7(2), 45–66, <http://doi.org/10.3390/jrfm7020045>
- [90] Miralles-Marcelo, J., Miralles-Quirós, M., Miralles-Quirós, J. (2015). *Improving international diversification benefits for US investors*, The North American Journal of Economics and Finance, 32, 64–76, <http://doi.org/10.1016/j.najef.2015.01.005>
- [91] Bai, Z., Li, H., McAleer, M., Wong, W. (2015). *Stochastic dominance statistics for risk averters and risk seekers: an analysis of stock preferences for USA and China*, Quantitative Finance, 15(5), 889–900, <http://doi.org/10.1080/14697688.2014.943273>


-
- [92] Dentcheva, D., Ruszczyński, A. (2006). *Portfolio optimization with stochastic dominance constraints*, Journal of Banking and Finance, 30(2), 433–451, <http://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2005.04.024>
- [93] Meskarian, R., Fliege, J., Xu, H. (2014). *Stochastic programming with multivariate second order stochastic dominance with applications in portfolio optimization*, Applied Mathematics and Optimization, 70, 111–140. <http://doi.org/10.1007/s00245-014-9236-6>
- [94] Levy, M., Levy, H. (2024). *Market Equilibrium and the Cost of Capital with Heterogeneous Investment Horizons*, Risks, 12(3), 1–16, <http://doi.org/10.3390/risks12030044>
- [95] Slamet, I., Ali, A., Qonaah N. (2024). *Analysis of calendar anomalies in Indonesian stock market using stochastic dominance approach*, In Proceedings of the 3rd Conference on Fundamental and Applied Science for Advanced Technology, ConFAST 2022, Hybrid, Yogyakarta, 040004, <http://doi.org/10.1063/5.0179646>
- [96] Subanti, S., Rahmaningrum, A. (2021). *Stochastic Dominance Applications on Lognormally Distributed Stock Return Data*, In Proceedings of the International Conference of Mathematics and Mathematics Education, I-CMME 2021, Virtual, Surakarta, 040007, <http://doi.org/10.1063/5.0114256>
- [97] Slamet, I., Aziz, M., Zukhronah, E. (2022). *Lognormal Distribution on Stochastic Dominance for Stock Selection*, In Proceedings of the International Conference of Mathematics and Mathematics Education, I-CMME 2021, Virtual, Surakarta, 040006, <http://doi.org/10.1063/5.0114268>
- [98] Levy, M. (2022). *An inter-temporal CAPM based on First order Stochastic Dominance*, European Journal of Operational Research, 298(2), 734–739, <http://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.07.012>
- [99] Blavatsky, P. (2023). *Expected return-expected loss approach to optimal portfolio investment*, Theory and Decision, 94(1), 63–81, <http://doi.org/10.1007/s11238-022-09870-3>
- [100] AlKhazali, O., Lean, H., Zoubi, T. (2022). *The Size Anomaly in Islamic Stock Indices: A Stochastic Dominance Approach*, International Journal of Financial Studies, 10(4), 1–14, <http://doi.org/10.3390/ijfs10040102>
- [101] Kedžo, M., Šego, B. (2021). *The relative efficiency of option hedging strategies using the third-order stochastic dominance*, Computational Management Science, 18(4), 477–504, <http://doi.org/10.1007/s10287-021-00401-z>
- [102] Janekova, J., Fabianova, J., Kadarova, J. (2021). *Selection of optimal investment variant based on monte carlo simulations*, International Journal of Simulation Modelling, 20(2), 279–290, <http://doi.org/10.2507/IJSIMM20-2-557>
- [103] Rahmaningrum, A., Slamet, I., Subanti, S. (2020). *Stochastic dominance application on Jakarta Islamic index with normal distribution*, In Proceedings of the International Conference on Science and Applied Science, ICSAS 2020, Surakarta, 020011, <http://doi.org/10.1063/5.0030362>
- [104] Rahmawati, I., Slamet, I., Zukhronah, E. (2019). *An Application of Stochastic Dominance with Truncated Normal Distribution on LQ45 Index*, In Proceedings of the Conference on Funda-

-
- mental and Applied Science for Advanced Technology, ConFAST 2019, Yogyakarta, 012042, <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1373/1/012042>
- [105] Dantzig, G. (1949). *Programming in a Linear Structure*, *Econometrica*, 17(1)
- [106] Simonnard, M. (1967). *Programowanie liniowe*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, Polska
- [107] Grabowski, W. (1980). *Programowanie matematyczne*, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, Polska
- [108] Bozarth, C., Handfield, R. (2019). *Introduction to Operations and Supply Chain Management*, 5th ed.; Pearson Education: Upper Saddle River, New York, USA
- [109] Banduka, N., Mladineo, M., Eric, M. (2017). *Designing a layout using Schmigalla method combined with software tool vistable*, *International Journal of Simulation Modelling*, 16(3), 375–385, [http://doi.org/10.2507/IJSIMM16\(3\)1.379](http://doi.org/10.2507/IJSIMM16(3)1.379)
- [110] Korzan, B. (1986). *Elementy teorii niezawodności*, Wojskowa Akademia Techniczna im. Jarosława Dąbrowskiego, Warszawa, Polska
- [111] Będkowski, L., Dąbrowski, T. (2006). *Podstawy eksploatacji. Część II. Podstawy niezawodności eksploatacyjnej*, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, Polska
- [112] Bobrowski, D. (1985). *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności w przykładach i zadaniach*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, Polska
- [113] Barlow, R., Proschan, F. (1987). *Mathematical Theory of Reliability*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA
- [114] Birolini, A. (2017). *Reliability Engineering: Theory and Practice*, 8th edition, Springer, Berlin, Germany, <http://doi.org/10.1007/978-3-662-54209-5>
- [115] Kosma, Z. (1999). *Metody numeryczne dla zastosowań inżynierskich*, Politechnika Radomska im. Kazimierza Pułaskiego, Radom, Polska
- [116] Wierzbiński, A. (2018). *Teoria i praktyka wspomaganie decyzji*, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, Polska
- [117] Trzpiot, G. (2000). *Ryzyko na rynku kapitałowym, w: Modelowanie preferencji a ryzyko '00, T. Trzaskalik (red.)*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice, Polska
- [118] Roy, B. (1990). *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, Polska
- [119] Hellwig, Z. (1998). *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, Polska
- [120] Stanisław, A. (2006). *Przystępny kurs statystyki z zastosowaniem STATISTICA PL na przykładach z medycyny. Tom 1. Statystyki podstawowe*, StatSoft, Kraków, Polska
- [121] Górecki, T. (2011). *Podstawy statystyki z przykładami w R*, Wydawnictwo BTC, Legionowo, Polska
- [122] Kot, S., Jakubowski, J., Sokołowski, A. (2007). *Statystyka, Podręcznik dla studiów ekonomicznych*, Diffin, Warszawa, Polska

-
- [123] Kahneman, D., Tversky, A. (1979). *Prospect Theory: an Analysis of Decision Under Risk*, *Econometrica*, 47(2), 263–291
- [124] Jaworowski, P., Micał, J. (2005). *Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach*, POLTEXT, Warszawa, Polska
- [125] Trzpiot, G. (2006). *Dominacje w modelowaniu i analizie ryzyka na rynku finansowym*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Katowice, Polska
- [126] <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:52021PC0556&from=EN>
(dostęp: 08.09.2021 r.)
- [127] <http://www.consilium.europa.eu/pl/press/press-releases/2019/06/13/cutting-emissions-council-adopts-co2-standards-for-trucks/>
(dostęp: 08.09.2021 r.)
- [128] http://ec.europa.eu/clima/policies/transport/vehicles/vecto_en
(dostęp: 12.08.2021 r.)
- [129] Ahmadi, H. (2019). *Probabilistic analysis of the DoB in axially-loaded tubular KT-joints of offshore structures*, *Applied Ocean Research*, 87, 64–80, <http://doi.org/10.1016/j.apor.2019.03.018>
- [130] Barraza, J., Valdez, F., Melin, P., Gonzalez, C. (2020). *Optimal Number of Clusters Finding Using the Fireworks Algorithm*, *Studies in Computational Intelligence*, 827, 83–93, http://doi.org/10.1007/978-3-030-34135-0_7
- [131] Biecek, P. (2017). *Przewodnik po pakiecie R*, Wydanie IV rozszerzone; Oficyna Wydawnicza GIS, Wrocław, Polska

RESEARCH ARTICLE | MARCH 01 2019

Stochastic dominance application for optimal transport company selection

Józef Żurek ; Jarosław Ziółkowski; Joanna Szkutnik-Rogoż



AIP Conf. Proc. 2078, 020074 (2019)

<https://doi.org/10.1063/1.5092077>



CrossMark

Articles You May Be Interested In

Vowel acquisition by prelingually deaf children with cochlear implants

J Acoust Soc Am (May 2004)

Three-dimensional spin structure in exchange-biased antiferromagnetic/ferromagnetic thin films

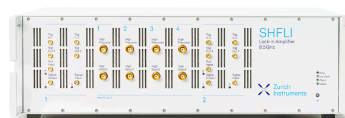
Appl. Phys. Lett. (September 2009)

E-Drone shipper: Towards an eco-friendly intercity courier delivery service to support global demand boom during pandemic

AIP Conference Proceedings (June 2022)

500 kHz or 8.5 GHz?
And all the ranges in between.

Lock-in Amplifiers for your periodic signal measurements



Find out more



Stochastic Dominance Application for Optimal Transport Company Selection

Józef Żurek^{1, a)}, Jarosław Ziółkowski^{2, b)} and Joanna Szkutnik-Rogoż^{2, c)}

¹*Air Force Institute of Technology, Księcia Bolesława Street 6, 01-494 Warsaw, Poland.*

²*Faculty of Mechanical Engineering, Military University of Technology,
Gen. Witolda Urbanowicza Street 2, 00-908 Warsaw, Poland*

^{a)}Corresponding author: jozef.zurek@itwl.pl

^{b)}jaroslaw.ziolkowski@wat.edu.pl

^{c)}joanna.szkutnik@wat.edu.pl

Abstract. This article presents the application of stochastic dominance to choose a transport company. Three courier companies were analysed. The first option was the DHL Poland company operating in more than 220 countries, the second one was DPD (Dynamic Parcel Distribution), and, the third carrier was GLS (General Logistic System) prospering in 42 countries, mainly in Europe. In the theoretical part of the paper, the definitions related to stochastic dominance of the first (First Stochastic Dominance FSD) and second (Second Stochastic Dominance SSD) orders were discussed. The objective of the article, which was to show various types of stochastic dominance from the mathematical perspective, as well as to analyse and compare the most effective investment decisions was achieved. In addition, the theoretical fundamentals of the construction of a multi-criterion model of a decision-making task were described. Based on the figures, the possibilities of applying computer software was presented in order to determine the stochastic dominance occurring between the three compared carriers.

INTRODUCTION

Entrepreneurs usually make an investment analysis for the expected capital return and a potential risk. In practice, it is difficult to identify a clear definition of risk, therefore, it is more convenient to use the measures that describe them. When making the decisions, especially financial ones, it is not possible to avoid uncertainty, therefore, the use of the stochastic dominance as a tool to facilitate the decision making is the most reasonable. In 1962, P. Quirk and R. Saposnik, in the paper [7], described the first order stochastic dominance (First Order Stochastic Dominance, FOSD), while, in 1969, J. Hadar and W.R. Russel defined the second order stochastic dominance (Second Order Stochastic Dominance, SOSD) [1]. In this article, a statistical aspect of using the stochastic dominance was discussed, and the relationship between Markowitz model and the second stochastic dominance was indicated. The execution of all the calculations is a complex process, therefore, the STATISTICA 13.1 package and Octave 3.4.3. programming language were applied. In addition, the distribution parameters were analysed, and an effect of the Octave 3.4.3. programme operation with an interpretation of the obtained results were presented.

ENTREPRENEURS' DECISIONS

The dominant factor that determines the rational entrepreneur's decisions is a rate of return which expresses a possible level of the profit from the invested capital. The rate of return of the investment at the time t can be determined using the formula:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (1)$$

where:

P_t – price in the period t ,

P_{t-1} – price in the period $t-1$.

The entrepreneurs' decisions, who more care about the knowledge of the future rate of return than the current one, usually refer to the future. This involves the presence of uncertainty, as a result of which, while analysing the investment, a set of potential implementations of the rates of return is considered. The future rate of return is a random variable. Based on the knowledge of the distribution, when making the investment decisions, it is essential to determine the expected rate of return on the basis of the following formula:

$$E(R) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot R_i \quad (2)$$

where:

p_i – probability of reaching the i possible rate of return,

R_i – i possible value of the rate of return,

m – number of values of the rate of return possible to achieve.

In the situation when the distribution is not known, the expected rate of return can be estimated on the basis of data from the past periods in accordance with the following formula:

$$E(R) = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n} \quad (3)$$

where:

R_i – rate of return implemented in the period i ,

n – number of considered periods.

Along with the increase in diversity of the rates of return, an increase of risk occurs. If the probability distribution is known, the variance of the rate of return can be determined on the basis of the following formula:

$$V = \sum_{i=1}^m p_i (R_i - E(R))^2 \quad (4)$$

where:

$E(R)$ – expected rate of return.

In a situation, when the probability distribution is not known, the variance determination is possible owing to the following relationship:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - E(R))^2}{n-1} \quad (5)$$

Most investors strive for achieving the maximum profit while minimising the taken risk [11].

MULTI-CRITERION AND MULTIVALUED STOCHASTIC DOMINANCE

A multi-criterion analysis involved the designation of a common family of criteria for the establishment and justification of preferences in the decision-making process. It is possible to aggregate the n -conditions in one aggregated criterion [8]. The stochastic dominance over recent years are more and more often used when comparing the distribution of probabilities. The comparison of the distribution of random variables is possible if the variance analysis and the analysis of averages fail. The experiments carried out by Kahneman and Tversky [4] confirm that in

case of income generating investments, the decision-makers more often avoid or try to reduce the risk. However, by making the choice between investments resulting in loss, they tend to take the risk. According to Vansnick, a multi-criterion decision-making task is defined as a complex model from a set of the probability distribution, a set of criteria and a set of decision-making variants [12]. The decision-making task can be presented as a model (A,X,E) (variants, criteria, assessments), in which a finite set of decision-making variants $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, a set of assessment criteria $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, a set of assessments of decision-making variants towards criteria $E = \{X_{ij}\}_{m \times n}$, are considered, where X_{ij} means a random variable with lower and upper functions of the probability distribution $f_{ij}(x)$ [10]. The multi-criterion issue model was presented in Table 1.

TABLE 1. Multi-criterion issue model (A,X,E). Source: [11]

criteria/variants	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n
a_1	$f_1(x_{11})$	$f_1(x_{12})$...	$f_1(x_{1j})$...	$f_1(x_{1n})$
a_2	$f_2(x_{21})$	$f_2(x_{22})$...	$f_2(x_{2j})$...	$f_2(x_{2n})$
...
a_m	$f_m(x_{m1})$	$f_m(x_{m2})$...	$f_m(x_{mj})$...	$f_m(x_{mn})$

The range of variation of random variable related to the criterion X_i can be presented as a range $[x_i, x_i^*]$, in which x_i means the worst, and x_i^* is the best criterion value X_i . It is necessary to select among the variants a_i and a_i' , due to the X_i criterion with the values of the range $[x_i, x_i^*]$ in the risk situation, where:

$$x_* = \min \{ \min \{x_{ij}\}, \min \{x'_{ij}\} \} \quad (6)$$

$$x^* = \max \{ \max \{x_{ij}\}, \max \{x'_{ij}\} \} \quad (7)$$

where: $x_{ij} \in X_{ij}$ and $x'_{ij} \in X'_{ij}$.

In order to determine whether a_i is at least as good as a_i' , it is important to determine the stochastic dominance type [6].

THE USE OF STOCHASTIC DOMINANCE IN THE STATISTICAL ASPECT

The use of the stochastic dominance in statistical terms allows to analyse various types of the asymmetric distributions. In addition, it is possible to verify the hypotheses about the stochastic dominance for non-parametric tests. If the rates of return of comparable investments have normal distribution, the stochastic dominance can be described using the standard deviation and expected value terms.

Theorem 1. [3] Let random variables R_1 and R_2 have normal distribution with the parameters respectively μ_1, μ_2 and σ_1, σ_2 . Then:

$$XFSDY \Leftrightarrow \mu_1 \geq \mu_2; \sigma_1 = \sigma_2 \quad (8)$$

$$XSSDY \Leftrightarrow \mu_1 \geq \mu_2; \sigma_1 \leq \sigma_2 \quad (9)$$

NUMERICAL EXAMPLE

This article analyses the stochastic dominance referring to three carriers: DPD, GLS, DHL. The research period included a calendar month in 2013, in which there were 22 working days. A reference point was the selection among the entire population, a certain finite number of elements and their testing in terms of a certain feature, in which the distribution was described with the use of a random variable X . In the mathematical statistics, based on the pre-test study results, it is possible to draw conclusions related to the analysed feature in the entire tested population. Such a behaviour is justified because there is a relationship between the population and the selected sample. It results from the fact that the distribution of values of the features in the representative test is similar to the distribution of values of the feature in the entire population [2].

A sequence of random variables X_1, X_2, \dots, X_n is called the n -element random sample, and a sequence of numbers x_1, x_2, \dots, x_n is called an observed random sample or a sample.

In the point estimation, a specific value obtained on the basis on the test results is assumed as the parameter value assessment. If the distribution of the tested feature depends on the unknown parameter θ , this parameter can be estimated on the basis of the n -element simple sampling, that is the situation, in which random variables are independent and each of them has the distribution compliant with the distribution of the tested population feature. The function $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ will be a function of the random sample X_1, X_2, \dots, X_n is called statistics. In the collection of sample statistics, there are the following elements:

- arithmetic mean of the sample:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (10)$$

The value of this statistics is called the empirical average value and it is calculated according to the formula:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (11)$$

where: x_i are the sample results.

- unloaded variance of the sample:

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (12)$$

the implementation of which is the unloaded empirical variance

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (13)$$

- unloaded standard deviation of the sample:

$$\hat{S} = \sqrt{\hat{S}^2} \quad (14)$$

The value of this statistics is called an empirical unloaded standard deviation. Table 2 presents the price lists of individual transport companies.

TABLE 1. Price lists of individual transport companies [13-15]

DHL		GLS		DPD	
Weight [kg]	Rate [PLN]	Weight [kg]	Rate [PLN]	Weight [kg]	Rate [PLN]
0–1	7.60	0–1	7.0	0–1	7.91
1–5	7.70	1–5	7.0	1–5	7.91
5–10	7.80	5–10	7.0	5–10	8.11
10–20	11.00	10–20	16.0	10–20	9.33
20–31.5	13.00	20–31.5	16.0	20–31.5	12.33

On the basis of the figures, bearing in mind that the asymmetrical average and standard deviation of the sample constitute estimators respectively of the expected value and standard deviation of a random variable, it is possible to construct a model in which the considered random variable is a rate of return. By using the formula (1), the values of the rates of return were determined for the considered carriers. In order to confirm the rightness of calculations in Fig. 1, the values of the rates of return were presented for three comparable carriers.

With the use of the Shapiro–Wilk test on the statistical significance $\alpha = 0.05$, a hypothesis on normality of the distribution of the rates of return was verified.

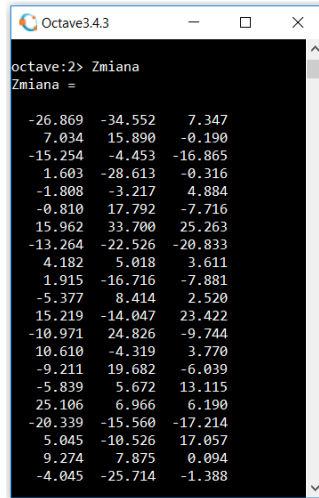


FIGURE 1. The values of the rates of return for DHL, GLS, and DPD carriers

The null hypothesis H_0 was adopted, according to which the considered rates of return have the normal distribution, however, the alternative hypothesis H_1 assumes that the considered rates of return do not have the normal distribution.

Furthermore:

- if $p < \alpha$, $p < 0.01$, we reject H_0 in favor of H_1 (clear decision),
- if $p < \alpha$, $p > 0.01$, we reject H_0 in favor of H_1 (unclear decision),
- if $p > \alpha$, $p > 0.1$, there is no grounds to reject H_0 (clear decision),
- if $p > \alpha$, $p < 0.1$, there is no grounds to reject H_0 (unclear decision) [9].

SW test statistics – W was calculated on the basis of the formula:

$$SW - W = \frac{\left[\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n,i} (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}) \right]^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (15)$$

where:

- x_i – disordered values in the sample,
- $x_{(i)}$ – values in the sample ordered in an increasing way,
- \bar{x} – arithmetic mean of the sample,
- n – sample size,
- $\lfloor n/2 \rfloor$ – entire part of the half of the sample size,
- $a_{n,i}$ – tabular test factors read for the sample with the size of n [5].

In order to verify the normality of the rates of return, the STATISTICA 13.1. package was applied. Table 3 shows the results of the Shapiro-Wilk statistics for the concerned carriers.

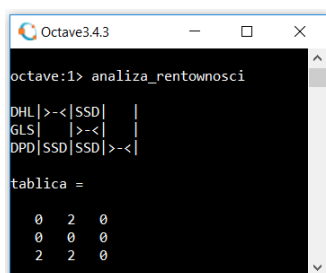
On the 0.05 statistical significance, it is important to conclude that there are no grounds to reject the null hypothesis, therefore, the rates of return have the normal distribution. In each of the considered case, the condition $p > \alpha$, was satisfied, where $\alpha = 0.05$. Moreover, it should be noted that $p > 0.1$, therefore, the decision is clear.

TABLE 2. Shapiro – Wilk statistics results for the considered carriers

Carrier	Shapiro – Wilk statistics	p – value
DHL	SW-W = 0.9986	$p = 0.999$
GLS	SW-W = 0.9795	$p = 0.918$
DPD	SW-W = 0.9698	$p = 0.728$

ANALYSIS OF PARAMETERS OF THE DISTRIBUTION OF THE RATES OF RETURN

With the use of the Octave 3.4.3 programme, the height of the rates of return, arithmetic mean, variance and standard deviation of the sample separately for each carrier were determined, and they were treated as estimators of the expected value, variance, and standard deviation. Then, a comparison of the expected values was made. The obtained value $\mu_i \leq \mu_k$ demonstrates the lack of the stochastic dominance. However, when the expected value is $\mu_i \geq \mu_k$, then, it is necessary to consider the possible variants for standard deviations. When $\sigma_i = \sigma_k$, the value of 1 corresponding to the first stochastic dominance (FSD) was showed in the matrix. When $\sigma_i < \sigma_k$, the value of 2 corresponding to the second stochastic dominance (SSD) was showed in the matrix. The Octave 3.4.3 programme operation results were illustrated in Fig. 2.



```

Octave3.4.3
octave:1> analiza_rentownosci

DHL |>-<|SSD| |
GLS | |>-<| |
DPD |SSD|SSD|>-<|

tablica =

    0    2    0
    0    0    0
    2    2    0
  
```

FIGURE 2. Octave 3.4.3 programme operation result

By using the Octave 3.4.3 programme, it is possible to notice a type of the stochastic dominance occurring between the carriers. When analysing the obtained results, it should be noted that GLS does not stochastically dominate over the other carriers. The result of it may be the lowest expected value and the highest standard deviation in relation to DHL and DPD. In turn, the second stochastic dominance occurrence was found between DHL and GLS carriers. Noteworthy is the fact that DPD dominates in the second stochastic dominance, both GLS and DHL. It means that in case of DPD, it is possible to expect the highest expected value and the lowest standard deviation value. In order to confirm the validity of the carried-out analysis, Table 4 summarises the basic parameters of the distribution of the rates of return determining the stochastic dominance occurrence.

TABLE 3. Distribution parameters of the rates of return in relation to the considered carriers

Carrier	Expected value	Variance	Standard deviation
DHL	-0.85	161.58	12.71
GLS	-1.64	347.53	18.64
DPD	0.91	152.60	12.35

The lowest expected value at the level of $\mu = -1.64$ and the highest standard deviation of $\sigma = 18.64$ were recorder in case of the GLS carrier, which justifies the lack of dominance of other carriers. The highest expected value of $\mu = 0.91$ and at the same time, the lowest standard deviation value at the level of $\sigma = 12.35$ were estimated for the DPD carrier, therefore, the most favourable option is a choice of this carrier.

In addition, in the Octave 3.4.3 programme, in Fig. 3, the graphs of profit and loss values and sorted values of the rates of return were showed in the considered period.

By analyzing the profit and loss values in case of DHL, there were losses at the beginning of the month. A similar trend can be seen in the second half of the month, for which the highest loss was recorded on 18.01.2013. On the graph of the sorted rates of return for DHL, it is additionally possible to notice that the rates of return reached a negative value eleven times in a month, and a positive value was reached ten times in a month.

The graph of the profit and loss values in relation to GLS was presented in Fig. 4.

By analyzing the profit and loss values for DHL and GLS carriers, it is possible to notice some similarity. Both in case of DHL and GLS, the losses were recorded at the beginning of the month. In case of DHL, the biggest loss was recorded on 18.01.2013, however, in case of GLS, it was on 07.01.2013. In addition, it results from the graph of the sorted rates of return that both in case of DHL and GLS, the rates of return reached a negative value eleven times

in a month, however, a positive value was reached ten times in a month. In case of both carriers, the negative values of the rates of return occurred more often than the positive ones. The graph of the profit and loss values for DPD was presented in Fig. 5.

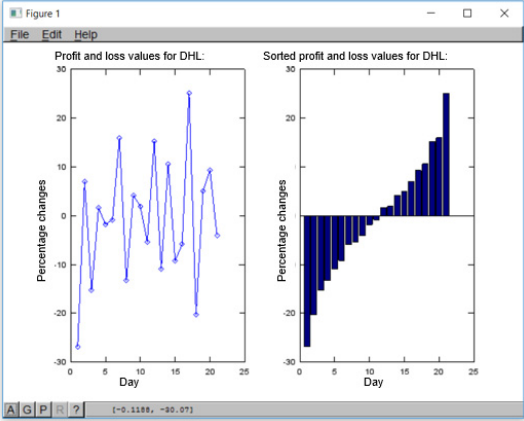


FIGURE 3. Profit and loss values recorded for DHL in the period of 02-31.01.2013

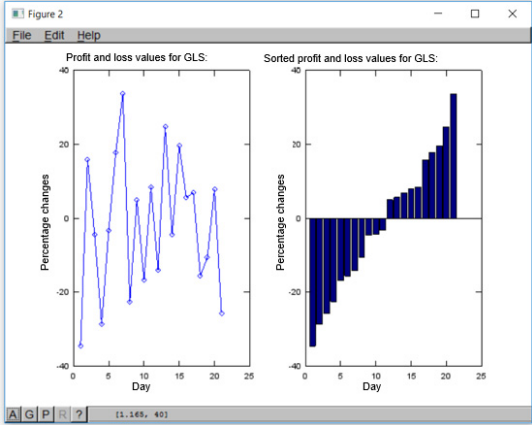


FIGURE 4. Profit and loss values recorded for GLS in the period of 02-31.01.2013

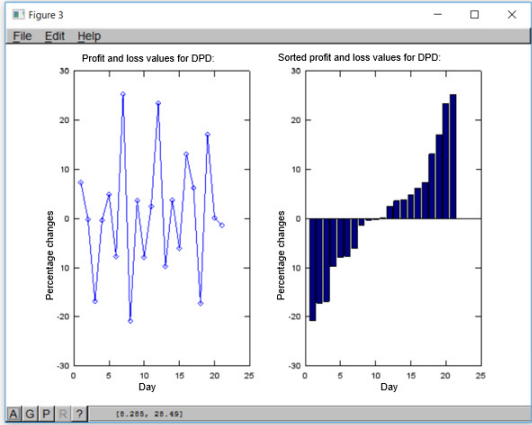


FIGURE 5. Profit and loss values recorded for DPD in the period of 02-31.01.2013

By analyzing the profit and loss values in case of the DPD carrier, the beginning of the month resulted in the profitable rates of return. The greatest decrease in the value of the rates of return occurred similarly as in case of GLS on 07.01.2013. It results from the graph of the sorted rates of return that the rates of return reached a negative value ten times in a month. It should be noted that the negative values of the rates of return occurred less frequently than the positive ones, which once again confirms the validity of choosing DPD as the best transport option.

CONCLUSIONS





The mathematical model presented in this article was constructed on the basis of the definitions formulated in the literature, nevertheless the empirical analysis proves the authenticity of the reached conclusions. Generally, the entrepreneurs strive for obtaining the profit from the conducted business activity. However, each investment involves the risk of obtaining a result different than expected. A developing portfolio theory explains the choice of investments providing the maximum profit with minimum risk. The stochastic dominance theory allows to select a set of effective investments in relation to entrepreneurs with different preferences. The first stochastic dominance criterion relates both to the entrepreneurs who avoid the risk, as well as those showing tendencies towards taking it. However, the second stochastic dominance criterion only applies to the entrepreneurs showing aversion to the risk. The carried-out analysis results clearly confirm the choice of the DPD carrier as the most favourable transport option.

REFERENCES

1. J. Hadar and J. W. Russel, *Am. Econ. Rev.* **59**, 25–34, (1969).
2. Z. Hellwig, *Probability Theory and Mathematical Statistics Elements*, 13th ed. (PWN, Warsaw, 1998), pp. 60–74.
3. P. Jaworowski and J. Micał, *Mathematical Modelling in Finance and Insurance* (POLTEXT, Warsaw, 2005), pp. 43–57.
4. D. Kahneman and A. Tversky, *Econometrica* **47**, 263–291 (1979).
5. S. Kot, J. Jakubowski, and A. Sokółowski, *Statistics, Coursebook for Economic Studies* (Difin, Warsaw, 2007), pp. 31–60.
6. J. M. Martel and K. Zaraś, “Multiattribute analysis based on stochastic dominance,” in *Models and Experiments in Risk and Rationality*, (Kluwer Academic Publishers, 1994), pp. 225–248.
7. J. P. Quirk and R. Saposnik, *Rev. Econ. Study* **29**, 140–146, (1962).
8. B. Roy, *Multi-Criterion Decision Support*, (Scientific and Technical Publishing, Warsaw, 1990), pp. 24–48.
9. A. Stanis, *Affordable Statistics Course Based on the STATISTICA PL Programme on the Examples from Medicine*, (StatSoft, Kraków, 1998), pp. 57–90.
10. T. Trzaskalik, G. Trzpiot and K. Zaraś, “Modelling of preferences with the use of stochastic dominance,” in *Modelling of Preferences vs. Risk '99*, (Publishing House of University of Economics, Katowice, 1999), pp. 40–71.
11. G. Trzpiot, “Risk on the capital market,” in *Modelling of Preferences vs. Risk '00*, (Publishing House of University of Economics, Katowice, 2000), pp. 27–63.
12. J. C. Vansnick, *Measurement Theory and Decision Aid. Readings in Multiple Criteria Decision Aid* (Springer Verlag, Berlin, 1990), pp. 30–55.
13. www.dhl.com.pl.
14. www.gls-group.eu.
15. www.dpd.com.pl.

Article

Reliability Analysis of Technical Means of Transport

Józef Żurek ¹, Jerzy Małachowski ^{2,*}, Jarosław Ziółkowski ² and Joanna Szkutnik-Rogoż ²¹ Air Force Institute of Technology, 01-494 Warsaw, Poland; jozef.zurek@itwl.pl² Faculty of Mechanical Engineering, Military University of Technology, 00-908 Warsaw, Poland; jaroslaw.ziolkowski@wat.edu.pl (J.Z.); joanna.szkutnik@wat.edu.pl (J.S.-R.)

* Correspondence: jerzy.malachowski@wat.edu.pl; Tel.: +48-261-839-140

Received: 16 March 2020; Accepted: 22 April 2020; Published: 26 April 2020



Abstract: The importance of system reliability within military logistics should be considered in terms of the ability to ensure the readiness of all available resources, e.g., means of transport, which are necessary during the realization of operational tasks. A special role is played by technical security, which enables the performance of all the specific tasks by the realization of the process supporting the subsystem in the area of providing the necessary assemblies, subassemblies and spare parts. The objective of the work was to define reliability in relation to technical means of transport and to illustrate an original solution leading to the determination of the expected fitness time of the available vehicle fleet, using the example of a selected military unit. The GNU Octave software—designed to conduct, among other things, advanced numerical computations—was used for the study. The daily operational mileage for a selected group of means of transport and the moments of failures were recorded during the tests, for the period from 31 December 2013 until 30 June 2015. The conducted analysis enabled the determination of the fundamental reliability indicators. The presented model has been supported with numerical examples, along with the interpretation of the obtained results.

Keywords: vehicle; operation; reliability; mathematical model

1. Introduction

The basic components of a logistics system's potential include the technical measures enabling the storage, displacement and handling of cargo units, integrated computer networks and decision-making services managing the physical movement of goods. The individual elements of a logistics system, along with the methods of their utilization and operation, form an infrastructure of logistic processes [1–4].

Due to the structure of the technical objects, the following infrastructural elements can be distinguished:

- Linear, understood as a grid of specified strips of land, intended for parking or traffic of means of transport;
- Point, comprising objects intended for the stationary handling of cargo and means of transport;
- Informative, consisting of media, telecommunication lines and measures ensuring data transfer [5–9].

A logistics system shall also ensure the obtaining of a required level and quality of logistics support and be characterized by appropriate efficiency. The reliability of technical objects, in technical terms, shall be understood as a set of properties determining the readiness of an object and impacting such readiness:

- Operability—the ability of an object to maintain or restore, under specific operating conditions, a state enabling the execution of required functions;

- Indestructibility—the ability of an object to function properly and be uninterrupted by failure under specific conditions within a given time interval [10];
- Ensuring the necessary operating measures [11,12].

The literature often equates reliability, in terms of meaning (and as a measure), to operational readiness. If a given object is composed of multiple subassemblies, then it is important to determine not only its reliability characteristics but also the impact of the reliability of individual subassemblies on the reliability of this specific object. The theory of reliability defines a system as an organized set of objects intended for the execution of specific tasks. The method of system element interconnections, which determines the impact of system failure depending on the failure of individual elements, is called the reliability structure of a system [13–15].

The objective of this research paper is to define reliability in relation to technical means of transport and to propose an original solution leading to the determination of the expected fitness time of the available vehicle fleet, using the example of a selected military unit (MU).

The literature of the subject is often related to the issue of transport system reliability, whereas less focus is placed on the reliability analysis of means of transport, which are the components of the entire system. Therefore, this publication focuses on issues associated with the reliability analysis covering technical means of transport and the determination of further research directions.

The most frequently estimated measures of transport system efficiency are:

- Operational readiness or availability;
- Safety;
- Reliability [16,17].

A transport process implemented by a transport system is complex and involves a set of activities that enable the execution of a specific transport task. Figure 1 shows the components of a transport system.

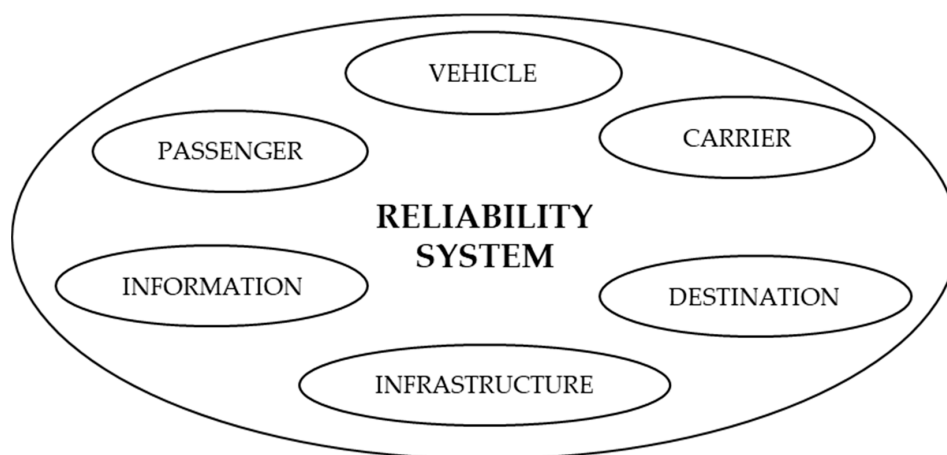


Figure 1. Components of a transport process

The reliability of a transport system depends on both its structure and the method of management at the engineering and operation stages. As a result, the analysis of a transport system reliability process shall take into account the possible occurrence of issues associated, among others, with:

- Possible vehicle unreliability;
- Unreliable infrastructure;
- Lack of information exchange;
- Erroneous operator decisions;
- Random events.

The indicated problems may adversely impact the efficiency of the entire transport process. Transport process reliability can be understood as the ability of a system to operate correctly over a planned time period. According to [18], the concept of transport system reliability can be applied to express the probability of a transport system satisfying the passenger demand for a transport service, without undesired events resulting from vehicle and infrastructure failure or the participation of other means of transport. The research paper [19] describes changes within the technologies for monitoring transport services and increasing their reliability in the era of advancing electronic communication and available localization technologies. In paper [20], the archived data from the automatic systems of localization are used to obtain information related to possible sources of vehicle unreliability. In the studies, the actual data from the CTM SpA public transport company from Cagliari in Italy were applied. The collected numerical data included 30 bus lines servicing approximately 35,500,000 passengers per year. A thorough analysis was conducted based on the archived data from the automatic systems of vehicle localization, whereas a reliability test concerned the prevention strategies. During the reliability analysis of the transport system, particular attention should be focused on the anomalies, which are frequently eliminated or neglected. In paper [21], the influence of the anomalies in the archived data from the automatic systems of localization is described in order to estimate both the regularity and the punctuality of transport services.

From a passenger's perspective, the reliability of a transport system can be perceived in terms of delay (longer travel times). The source literature contains numerous reliability models for travel time in passenger transport, where the travel time reliability is studied, among others, in terms of measuring its duration variability [22–26], whereas the authors of [27] analyzed the travel time reliability based on a triangular distribution. An innovative approach to the problem of travel time reliability is presented in paper [28], in which two measurements of reliability are introduced, namely, PPR—the percentage of passengers receiving a regular service and PPP—the percentage of passengers receiving a punctual service. The proposed factors are of key importance while defining the capabilities of transport companies aiming to improve passenger service performance.

Article [29] presents a public transport service reliability analysis using the graph theory. Paper [30] describes a thorough reliability analysis of a transport network, based on multimodal transport systems.

In relation to the reliability of means of transport, the issue was analyzed in paper [31], in which the author focused on describing the reliability characteristics of means of transport within urban areas. Article [32] suggests a procedure for estimating the reliability measures for means of transport in relation to a selected route of municipal mass transit. The model, developed using the PT VISION VISSIOM (ver. 5.4) app, points out that the analysis covered only a single, 10.33 km long trolleybus route. It was emphasized that the conducted studies were based on a simulation model developed in the course of the previous research. As a result, in order to carry out a more thorough analysis, it would be necessary to extend the research area into a municipal transport system and take all public means of transport into account.

The authors of this paper believe that the reliability of technical means of transport shall be understood as a foreseeable ability to perform a task that involves the correct use of the functions available within a specified time period, while simultaneously taking into account the actual operating conditions.

The reliability of technical means of transport that provide services for the military is of crucial importance from the perspective of conducting operational tasks at various command levels. This is a consequence of the fact that the basic tasks of military logistics, in technical terms, are to ensure correct operation and maintain an appropriate level of military equipment readiness. A high reliability of technical means of transport is required both in terms of carrying out tasks and ensuring the safety of soldiers performing such tasks. Monitoring the vehicle technical condition in terms of the frequency of conducted preventive replacement of their sub-assemblies, assemblies and parts significantly increases the reliability of the entire transport system.

The ability to predict future phenomena and determine the expected time before failure, i.e., expected fitness time, are of particular importance. It is possible to utilize numerical integration methods for this purpose, which greatly facilitate the calculations. Therefore, this publication proposes a novel solution in the form of source code developed in the Notepad++ text editor, designed to determine the reliability measure, which is to be the expected fitness time of the studied fleet of vehicles. After calling a file name in the GNU Octave command window, the software displays a message prompting the user to enter a reliability function formula along with the defining integration limits. The study compares the selected numerical integration methods and indicates their advantages and disadvantages.

2. Methodology

This section describes the theoretical grounds for developing a mathematical model. The functional characteristics of reliability, considered in terms of probability and described in Section 2.1, are related to continuous random variables and may be also applied during mathematical transformations in order to determine specific functions analytically. If the considered objects are unreparable, it is necessary to know relevant probability distributions in order to determine a value of a specified reliability factor. Then, a value of this factor should be determined based on the analytical methods of a probability theory. From a practical perspective, only the values of reliability factors in a certain population and statistical methods for the estimation of these values may be referred to. Functions characterizing a random time of object fitness, described in Section 2.1, are simply interpreted statistically in the case when the probability of events is replaced with their occurrence frequency. There can be distinguished two groups of methods for the statistical presumption of reliability:

- Non-parametric methods, in which the probabilistic characteristic of a random variable is deduced directly;
- Parametric methods, in which the probabilistic characteristics of random variables are defined indirectly through determining the probabilistic characteristics of specific parameters from an experiment.

A correlation of parametric and non-parametric methods, for a statistical test of object reliability, is presented in the form of a chart (Figure 2).

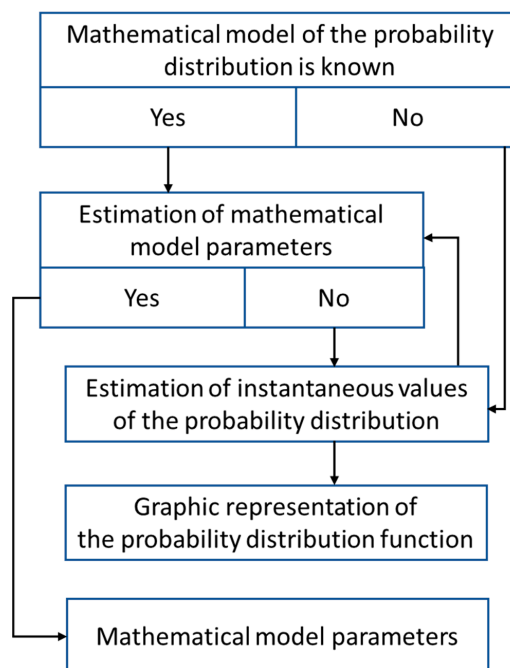


Figure 2. Flowchart of the correlation of parametric and non-parametric methods.

If it is required to estimate the functional characteristics of reliability based on the empirical data, obtained during either observations or experimental tests, the object reliability may be characterized through a set of numerical data randomly selected from a given population (set) of objects. Therefore, it is crucial to appropriately estimate the parameters of the distribution of the considered variable as well as to determine the empirical characteristics, both numerical and functional, described in Section 3.

2.1. Theoretical Grounds for Developing a Mathematical Model

Theoretically, each object can be considered as a system in the course of tests. There is no objective division of objects into systems and elements. The developed formal model for this object constitutes grounds for determining whether a given object, the reliability of which is to be tested, will be treated as a system. In the case of reliability, the objective is to study the relationships between the system element reliability and the entire system reliability [10].

A mathematical model of a non-renewable technical object that describes its reliability, understood as the ability to execute tasks under specific conditions and within a known time interval, is a non-negative and constant random variable T [33–39]. The basic measure of the reliability of an object $R(t)$ within a time interval $[0, t]$ is the object probability described by the following formula in Equation (1):

$$R(t) = P(T \geq t) \text{ for } t \geq 0 \tag{1}$$

The reliability function of an object $R(t)$ for each $t \geq 0$ has a value equal to the probability of an event involving object failure-free operation at least until t , which is the probability of an object being in a state of fitness until t .

The function, which for each established $t \geq 0$ adopts the value of the probability of an event that the object at moment t is damaged, is referred to as an unreliability function, described by the following formula in Equation (2):

$$F(t) = P(T < t) = 1 - R(t) \tag{2}$$

If the reliability function is absolutely continuous, then:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(u) du \text{ for } t \geq 0 \tag{3}$$

Function f satisfying the condition in Equation (3) is called a probability density. At all continuity points, the probability density can be expressed as a derivative, using the following relationship in Equation (4):

$$f(t) = \frac{d}{dt}[F(t)] = -\frac{d}{dt}[R(t)] \tag{4}$$

If the probability density and reliability are known, then it is also possible to determine the failure rate with Equation (5):

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt}[\ln R(t)] = \frac{f(t)}{R(t)} \tag{5}$$

Using the Taylor’s formula, the relationships in Equations (6) and (7) can be noted as:

$$f(t) \approx \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t} \tag{6}$$

$$\lambda(t) \approx \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)\Delta t} \tag{7}$$

The formula in Equation (6) indicates an interpretation of the probability density, which is understood as a decline in reliability over a short time interval of Δt , whereas the relationship in Equation (7) means that the failure rate is a relative decline in the reliability of an object per unit of time.

A measure of the depletion of an object task execution reserve is a leading function or cumulative failure rate described by the formula:

$$\Lambda(t) = -\ln[R(t)] = \int_0^t \lambda(u)du \text{ for } t \geq 0 \tag{8}$$

Each of the presented functions characterizing the object fitness time can be expressed by any different one of them [40–43].

If the reliability function $R(t)$ is known, the expected operating time before failure is calculated from the relationship in Equation (9):

$$ET = \int_0^{\infty} R(t)dt \tag{9}$$

In relation to non-renewable objects, the expected value of the random variable T is also often called an expected fitness time [43], and its measure can be calculated using numerical integration methods. If an integrand is not an elementary function, the analytical determination of the integral can be very difficult or even impossible. Numerical formulas for the integration of functions with single independent variables are called quadratures [44].

The following designations were introduced to precisely explain the applied numerical formula:

a —lower integration limit;

b —upper integration limit;

t_i —equidistant quadrature nodes, such as $t_i = a + \frac{(b-a)}{n^*}i, i = 0, \dots, n^*$;

h —length of the smallest subdivision (applies to compound quadratures).

The rectangle rule involves approximating an area limited by a function graph by rectangles with a base equal to the integration step length and a height equal to the function within the interval determined by the integration step.

The rectangle quadrature based on the node $t_0 = (a + b)/2$ can be expressed as:

$$\int_a^b R(t)dt \approx (b - a)R\left(\frac{a + b}{2}\right) \tag{10}$$

The trapezoidal rule consists of approximating the area limited by a function graph by rectangular trapezoids with a height equal to the length of the integration step and bases with lengths corresponding to the function values at nodal points on the interval boundary [45].

The trapezoidal quadrature based on nodes $t_0 = a$ and $t_1 = b$ shall be calculated using the following relationship:

$$\int_a^b R(t)dt \approx \frac{(b - a)}{2}(R(a) + R(b)) \tag{11}$$

The Simpson’s rule involves approximating an area limited by a function graph by a square function spread over the value of a function integrated at the integration interval central points, for which the sides are the values of a function integrated at boundary points.

Simpson’s quadrature based on nodes $t_0 = a, t_1 = b$, and $t_2 = (a + b)/2$ can be determined based on the formula:

$$\int_a^b R(t)dt \approx \frac{b-a}{6} \left(R(a) + 4R\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(b) \right) \tag{12}$$

Calculation accuracy is often improved by applying a division of the integration interval in question in an n^* number of sub-intervals and determining a compound trapezoidal quadrature and compound Simpson’s quadrature, which are described by the relationships in Equations (13) and (14):

$$\int_a^b R(t)dt \approx h \left(\frac{R(a) + R(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n^*-1} R(a + ih) \right) \text{ where } h = \frac{(b-a)}{n^*} \tag{13}$$

$$\int_a^b R(t)dt \approx \frac{h}{3} \left(\frac{R(a) + R(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n^*-1} R(a + ih) + 2 \sum_{i=0}^{n^*-1} R\left(a + ih + \frac{h}{2}\right) \right) \tag{14}$$

Table 1 describes the advantages and disadvantages for each of the applied rules.

Table 1. Advantages and disadvantages of the applied interpolation quadratures.

Quadrature (Rule)	Disadvantages	Advantages
Rectangular	Very low accuracy resulting from node selection; high-error method	Calculation simplicity
Trapezoidal	Accuracy depends on node selection	Calculation simplicity; higher accuracy than rectangular rule; need for fewer calculations in order to obtain better result accuracy
Simpson’s	Complicated calculation formula based on three nodes	Higher accuracy than rectangular and trapezoidal rules
Compound trapezoidal	Sensitive to a number of nodes; complex calculation formula	Rapid convergence rate; possibility to complete the calculation process after reaching a set accuracy
Compound Simpson’s	Sensitive to a number of nodes; extended numerical formula	Very rapid convergence rate; possibility to complete calculations after obtaining a set accuracy; method accuracy increases with an increase in the number of nodes

3. Mathematical Model—Implementation

The characteristics resulting from a group randomly selected from a given object population are called empirical characteristics. The determination of empirical characteristics, both functional and numerical, can be presented in the case of observing the fitness time to failure of n studied objects. The following designations were adopted for the development of the vehicle reliability model:

- (a) The number of studied vehicles:

$$n = n(t) + m(t), \tag{15}$$

where:

$n(t)$ —the number of fit for the use of vehicles until moment t ;

$m(t)$ —the number of unserviceable vehicles until moment t ;

- (b) The reliability empirical function:

$$\bar{R}(t) = \frac{n(t)}{n} = \frac{n - m(t)}{n} = 1 - \frac{m(t)}{n}, \tag{16}$$

(c) The unreliability empirical function:

$$\bar{Q}(t) = 1 - \bar{R}(t) = \frac{n - n(t)}{n} = 1 - \frac{n(t)}{n}, \quad (17)$$

(d) The failure probability density empirical function:

$$\bar{f}(t) = \frac{n(t) - n(t + \Delta t)}{n\Delta t} = \frac{\bar{R}(t) - \bar{R}(t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad (18)$$

(e) The failure rate empirical function:

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{n(t) - n(t + \Delta t)}{n(t)\Delta t} = \frac{\bar{R}(t) - \bar{R}(t + \Delta t)}{\bar{R}(t)\Delta t}, \quad (19)$$

(f) The empirical leading function:

$$\bar{\Lambda}(t) = \sum_i \bar{\lambda}(t_i)\Delta t. \quad (20)$$

Glivenko's theorem indicates that at each continuity point of a distribution function of a random variable describing the fitness time within a population, in which the sample was randomly selected, for each $\varepsilon > 0$, the following boundary property occurs:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_t |\bar{Q}(t) - Q(t)| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (21)$$

It justifies applying the empirical distribution function to evaluate the reliability of the objects selected from a given population [43].

The knowledge of the failure rate function's waveform enables the obtaining of important information in the fields of:

- Properly equipping the objects with tools and spare parts;
- Determining the spare part production output;
- Determining the usefulness of applying the preventive part or assembly replacements;
- Determining the object operating periods;
- Determining the optimum object durability;
- Planning the recovery of scarce elements or assemblies from repaired and scrapped objects [42].

4. Numerical Example—Real Case Study

The potential of a MU (Military Unit) machinery park consists of 11 vehicles necessary to execute specific tasks. The operational process analysis involved a group of average-capacity, high-mobility means of transport with a permissible gross vehicle mass below 7000 kg. The main purpose of the studied group of vehicles was transporting people, transporting cargo and using the chassis for installing special devices, depending on the performed tasks. The research involved recording daily operational mileage in the period from 31 December 2013 to 30 June 2015 (18 months) and the date of the failure. Unfortunately, due to the lack of access to repair sheets, a simplified assumption that the vehicles in question were not renewable was adopted. The figures used for the calculations were taken from military operational documents such as departure orders and technical service sheets. The task involves analyzing the reliability of technical means of transport and determining the expected fitness time of an MU fleet. Table 2 lists the figures concerning fit and unfit technical objects over a defined operating time.

Table 2. List of fit and unfit vehicles from 31 December 2013 to 30 June 2015.

Period t	$n(t)$	
31 December 2013	11	0
1 January 2014–31 March 2014	8	3
1 April 2014–30 June 2014	8	3
1 July 2014–30 September 2014	6	5
1 October 2014–31 December 2014	5	6
1 January 2015–31 March 2015	5	6
1 April 2015–30 June 2015	4	7

A vehicle reliability empirical function for subsequent periods was calculated based on the relationship in Equation (16), and its waveform is depicted in Figure 3.

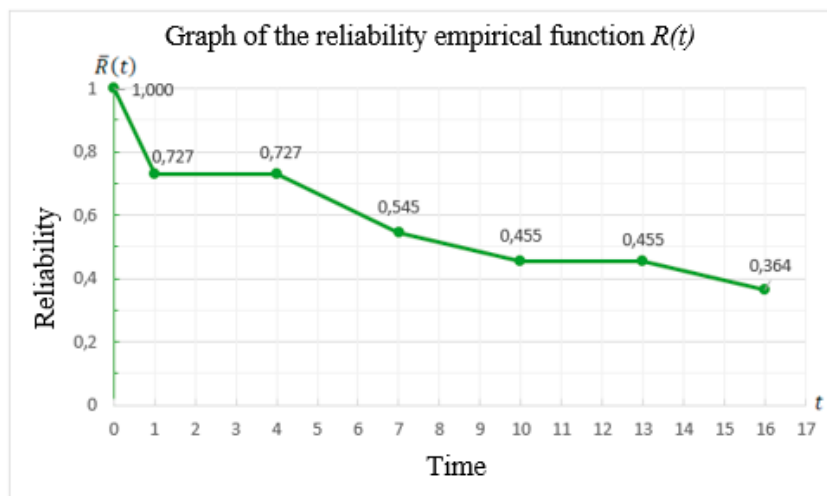


Figure 3. Reliability empirical function waveform.

The reliability function graph indicates that there was no change in the number of fit vehicles over the period in question on two occasions. The geometrical interpretation of the integral and formula in Equation (16) indicates that the expected fitness time is equal to the area limited by the reliability function and coordinate system axes.

There are currently more and more computer programs and packages available, such as MATLAB, C++, Pascal or BASIC, that can be used for numerical integration. However, it should be noted that they require the user to be proficient in their operation and have a thorough knowledge of the available functions. An alternative to commercial software can be the freeware environment called Octave, which enables the application of the programming techniques and loops as well as the generation of new user functions or the conducting of complex numerical computations. By applying numerical integration, the values of individual simple and complex quadratures were calculated, and the results are shown in Figure 4.

GNU Octave is a relatively little, popular programming environment, and thus, a script for calculating the values of individual quadratures (expected fitness times for a studied vehicle group) was developed for the purposes of this study. Figure 5 illustrates the source code of the software using the Notepad++ text editor.

```

Octave3.4.3
octave:1> quadratures

please key in function to integrate "y=-0.0337*x+0.8562"
please input lower bound of integral 0
please input upper bound of integral 18
Rectangle = 9.9522
Trapezoidal = 9.9522
Simpson = 9.9522
PLEASE KEY IN NUMBER OF EQUALLY SPACED SUBDIVISIONS 100
Trapezoidal_complex = 9.9522
Simpson_complex = 9.9522

< integrate "y=-0.0002*x.^3+0.0064*x.^2-0.0897*x+0.9286"
please input lower bound of integral 0
please input upper bound of integral 18
Rectangle = 8.8902
Trapezoidal = 10.348
Simpson = 9.3762
PLEASE KEY IN NUMBER OF EQUALLY SPACED SUBDIVISIONS 100
Trapezoidal_complex = 9.3763
Simpson_complex = 9.3762

please key in function to integrate "y=0.8685*exp(-0.056*x)"
please input lower bound of integral 0
please input upper bound of integral 18
Rectangle = 9.4440
Trapezoidal = 10.669
Simpson = 9.8524
PLEASE KEY IN NUMBER OF EQUALLY SPACED SUBDIVISIONS 100
Trapezoidal_complex = 9.8491
Simpson_complex = 9.8490
    
```

Figure 4. Result of Octave 3.4.3 software operations.

```

1 clear all
2 printf(' \n')
3 f=inline(input('please key in function to integrate '));
4 s=input('please input lower bound of integral ');
5 t=input('please input upper bound of integral ');
6 x=s:0.01:t;
7 y=f(x);
8 plot(x,y);
9 hold on;
10 %rectangle rule
11 Rectangle=(t-s)*f((s+t)/2)
12 %graph of function
13 y=f(x*(s+(s+t)/2));
14 %plot(x,y,'r');
15 %trapezoidal rule
16 Trapezoidal=((t-s)/2)*(f(s)+f(t))
17 x=[s,t];
18 y=[f(s),f(t)];
19 %plot(x,y,'m');
20 %Simpson's rule
21 Simpson=((t-s)/6)*(f(s)+4*f((s+t)/2)+f(t))
22 x=[s,(s+t)/2,t];
23 y=[f(s),f((s+t)/2),f(t)];
24 %plot(x,y,'k');
    
```

```

25 %complex quadrature
26 n=input(' PLEASE KEY IN NUMBER OF EQUALLY SPACED SUBDIVISIONS ');
27 h=(t-s)/n;
28 sumat=0;
29 for i=1:(n-1)
30 sumat=sumat+f(s+i*h);
31 endfor
32 %complex trapezoidal rule
33 Trapezoidal_complex=h*(f(s)+f(t))+0.5*sumat;
34 %graph of function
35 x=linspace(s,t,n+1);
36 y=f(x);
37 %plot(x,y,'c');
38 plot(x,y,'c');
39 sumas2=0;
40 sumas=0;
41 for i=1:(n-1)
42 sumas=sumas+f(s+i*h);
43 endfor
44 for i=0:(n-1)
45 sumas2=sumas2+f(s+i*h+0.5);
46 endfor
47 %complex Simpson's rule
48 Simpson_complex=(h/3)*(f(s)+f(t))+0.5*sumas+2*sumas2;
49 %graph of function
50 x=linspace(s,t,2*n+1);
51 y=f(x);
52 %plot(x,y,'y');
53 plot(x,y,'y');
54 printf(' \n')
    
```

(a) Rectangle, trapezoidal and Simpson’s rule

(b) Compound trapezoidal and compound Simpson’s rule

Figure 5. Source code of the numerical integration software.

It should be noted that in order to develop a function, the text file needs to be saved in the working directory under the same name as the function executed in the GNU Octave command window. The integration limits in the attached script are designated with the letters *s* and *t*.

Table 3 shows the results of applying the individual quadratures depending on the adopted reliability empirical function.

Table 3. Results obtained with subsequent quadratures.

Function/Method	Rectangle	Trapezoidal	Simpson’s	Compound Trapezoidal	Compound Simpson’s	R2
$\bar{R}_1(t)$	9.9522	9.9522	9.9522	9.9522	9.9522	0.85
$\bar{R}_2(t)$	8.8902	10.348	9.3762	9.3763	9.3762	0.91
$\bar{R}_3(t)$	9.4440	10.669	9.8524	9.8491	9.8490	0.93

Where:

$$\bar{R}_1(t) = -0.0337t + 0.8562, \tag{22}$$

$$\bar{R}_2(t) = -0.0002t^3 + 0.0064t^2 - 0.0897t + 0.9286, \tag{23}$$

$$\bar{R}_3(t) = 0.8685e^{-0.056t}. \tag{24}$$

The lowest values of the match factor R2 were obtained by approximation using the linear function. An approximation of the reliability empirical function using a polynomial of the first degree subsequently led to the determination of the same expected fitness time value for each of the applied quadratures. A third-degree polynomial was used to obtain a higher match factor than the one determined using a linear function. However, it should be noted that the highest R2 factor of 93% was recorded when approximating the reliability empirical function using an exponential function.

Another method for the determination of quadrature values is using the “quad” feature provided in the Octave 3.4.3 software. The computation results for individual approximations of the reliability empirical function are shown in Figure 6.

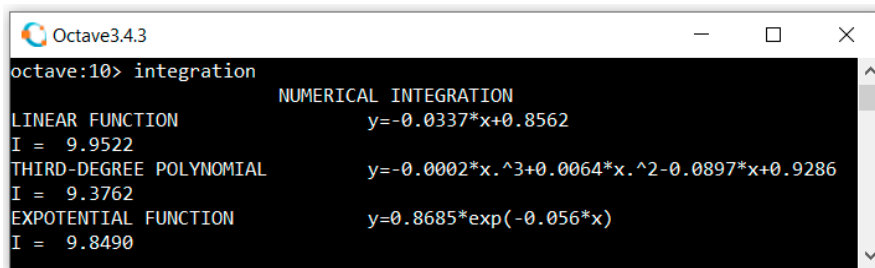


Figure 6. Result of applying the “quad” feature.

Numerical integration using the “quad” feature enabled the obtaining of results corresponding to a complex Simpson’s quadrature. Figure 7 shows the expected fitness time calculated using mathematical software.

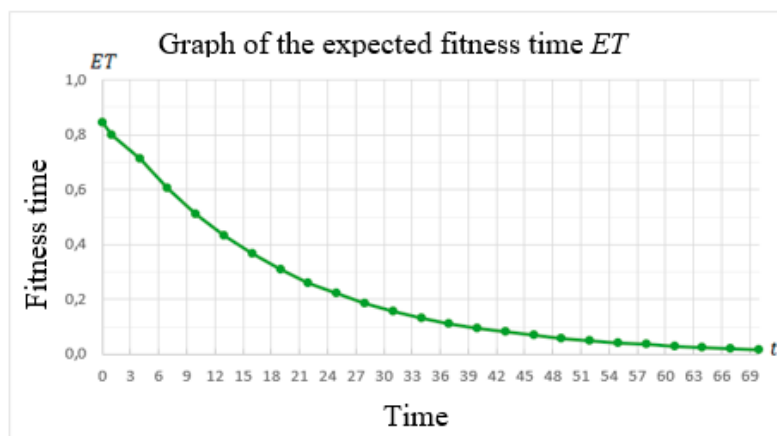


Figure 7. Expected fitness time.

The expected fitness time value when $t \rightarrow \infty$ is 15.509 months. Figure 8 illustrates the computation results.

It should be noted that, depending on the integration interval length, the values obtained using complex quadratures differ to a very small extent, whereas a significant increase in the integration interval division leads to the convergence of the obtained results.

Another reliability characteristic is a failure rate function that depends on the physical properties, imposed requirements and operating conditions of the objects in question. It can be a function that

is constant over time, monotonically decreasing or monotonically increasing and can have a single extreme (maximum or minimum) or several extreme points. The presence of extreme points results from the fact the number of unfit vehicles in the second quarter of 2014 and the first quarter of 2015 did not change. The results of the conducted calculations are shown in Figure 9.

```

Octave3.4.3
octave:12> complex_quadratures

please key in function to integrate      "y=0.8685*exp(-0.056*x)"
please input lower bound of integral 0
please input upper bound of integral 100
PLEASE KEY IN NUMBER OF EQUALLY SPACED SUBDIVISIONS  50000
Trapezoidal_complex = 15.452
Simpson_complex = 15.452

please key in function to integrate      "y=0.8685*exp(-0.056*x)"
please input lower bound of integral 0
please input upper bound of integral 300
PLEASE KEY IN NUMBER OF EQUALLY SPACED SUBDIVISIONS  50000
Trapezoidal_complex = 15.509
Simpson_complex = 15.509

please key in function to integrate      "y=0.8685*exp(-0.056*x)"
please input lower bound of integral 0
please input upper bound of integral 500
PLEASE KEY IN NUMBER OF EQUALLY SPACED SUBDIVISIONS  50000
Trapezoidal_complex = 15.509
Simpson_complex = 15.509
    
```

Figure 8. Complex quadrature values depending on the integration interval division.

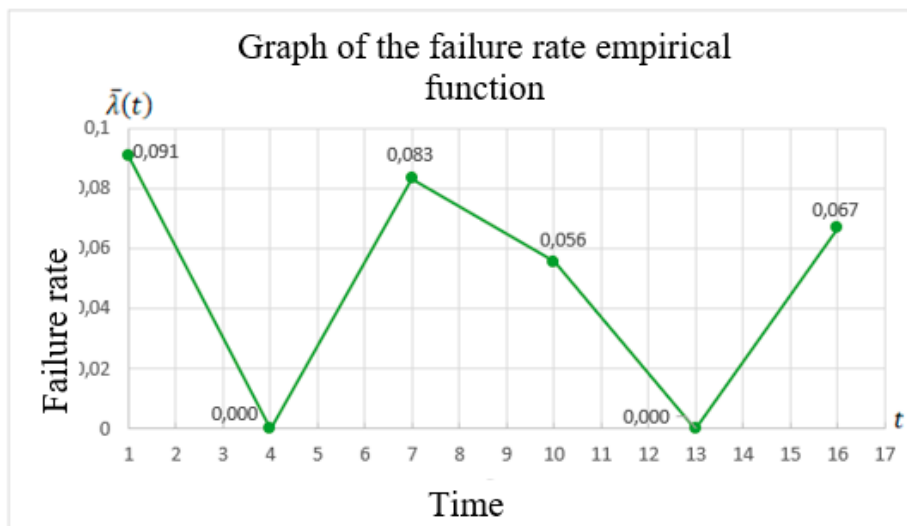


Figure 9. Failure rate function waveform.

The cumulative failure rate graph indicates that an increase in the number of unfit vehicles was recorded over time, which may be caused by the ongoing adaptation and wear processes. The so-called premature failures, which result from the improper performance of the objects or the application of incorrect technology, are the most common during the adaptation period. When the impact of the adaptation period process is negligible, fatigue and wear of the objects are reflected in a growing function of the cumulative failure rate, which is shown in Figure 10.

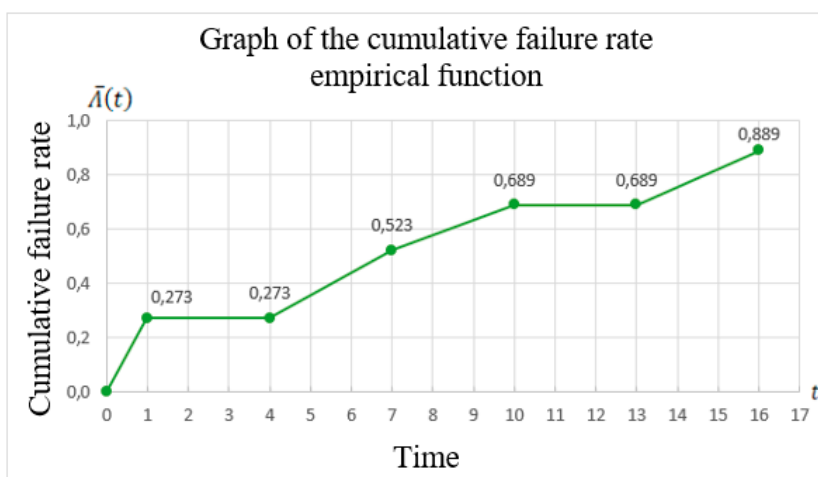


Figure 10. Leading empirical function waveform.

5. Conclusions

The objective of this article was to define the reliability of technical means of transport, using the example of a selected MU, and to determine the expected fitness time, using the GNU Octave and Notepad++ software. The source literature contains numerous studies on the reliability of a transport system, with much less elaboration related to the issues associated with the reliability of means of transport, which are, undoubtedly, components of the entire system. Ensuring an appropriate level of military equipment readiness and proper operating conditions for vehicles enables the execution of tasks at individual command levels. Every vehicle failure can lead to growing operating costs resulting from the need for diagnostics and repairs. It should be noted that the operating conditions of means of transport significantly influence their technical condition, durability and reliability. This can be reflected in the decreasing operating efficiency of the vehicles and can impose a higher frequency of maintenance work.

This study focused on determining the reliability characteristics, both functional and numerical. One of the numerical characteristics is the expected fitness time, the value of which can be calculated using numerical integration methods. The article presents a novel solution in the form of a script, the implementation of which in GNU Octave leads to the determination of the expected fitness time for a studied group of vehicles. It also discusses the theoretical grounds for the structure of the mathematical model and explains the purposefulness of applying the numerical formulas for the integration of functions with single independent variables, so-called quadratures. Each of the applied methods was compared regarding the indicated advantages and disadvantages resulting from their application.

The subject of the research included a group of medium-capacity, high-mobility military vehicles, with a permissible gross vehicle mass below 7000 kg. The main purpose of the analyzed means of transport was carrying people and equipment and, depending on the needs, the ability to adapt the chassis for the installation of special devices. Over the course of the 18-month studies, using departure orders and technical servicing sheets, the operational mileage of each vehicle and the dates of the failure were recorded on a daily basis. Based on the collected data, it was concluded that the number of roadworthy (fit) vehicles over the period in question changed on two occasions. The highest alignment factor of 93% was obtained through the approximation of the empirical reliability function using an exponential function. It should be noted that, depending on the adopted integration interval length, the expected fitness time values calculated using the compound trapezoidal rule and compound Simpson’s rule were slightly different. The expected fitness time for the studied group of vehicles was approximately 15 months. The results of tests covering medium-capacity, high-mobility military vehicles have their specific characteristics and have not yet been the subject of other publications. Given the above, the authors were not able to compare them with the study results presented in other

publications. The determination of the expected fitness time is significantly simplified by the possibility of applying the “quad” feature provided in the GNU Octave software, which consequently led to obtaining a result corresponding to the assumed Simpson’s quadrature. The conducted calculations showed that the GNU Octave software is an effective tool when applied for the determination of the expected fitness time, depending on the adopted reliability function. The implementation of the proposed solution reduces the calculation time and enables a user to determine the expected fitness time based on the individually specified criteria.

The failure rate function—which enables the obtaining of information regarding, among other things, the purposefulness of applying preventive subassembly, assembly and spare part replacements—is important. While analyzing the waveform of a failure rate empirical function, it should be noted that the cause of the double occurrence of extreme points, resulting from the fact that the numbers of unfit vehicles in 2014 Q2 and 2015 Q1 were similar, did not change. Furthermore, the growing waveform of the cumulative failure rate empirical function means that the number of unfit vehicles grew over years, which might have resulted from the adaptation processes in the initial operation phase or wear resulting from the progressing corrosion processes.

Expanding the reliability analysis with the Monte Carlo method will be a reasonable direction for further research. It is one of the numerical integration methods, enabling the modeling of the processes, the course of which depends on random factors. This involves entering information regarding the integration interval in question and the number of points to be generated, in order to calculate the integral value. The accuracy of the Monte Carlo method depends on the applied pseudo-random number generator. The biggest advantage resulting from the application of this method is the fact that the increasing computing power of computers enables the solving of increasingly complex and complicated problems. However, it should be noted that the results depend on the quality of the used pseudo-random number generator.

Author Contributions: Conceptualization, J.Ż. and J.S.-R.; methodology, J.S.-R. and J.Z.; software, J.S.-R.; validation, J.Z., and J.M.; formal analysis, J.Ż.; writing—review and editing, J.S.-R. and J.M.; visualization, J.S.-R. and J.Z.; supervision, J.M. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research received no external funding.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

1. Niziński, S.; Żurek, J.; Ligier, K. *Logistics for Engineers*; Transport and Communication Publisher: Warsaw, Poland, 2011; p. 229.
2. Barlow, R.E.; Proschan, F. *Mathematical Theory of Reliability, Classics in Applied Mathematics*; Society for Industrial and Applied Mathematics: Philadelphia, PA, USA, 1965; p. 12.
3. Zieja, M.; Ziółkowski, J.; Oszczyła, M. Comparative Analysis of Available Options for Satisfying Transport Needs Including Costs. In Proceedings of the 23rd International Scientific Conference on Transport Means, Palanga, Lithuania, 2–4 October 2019; pp. 1433–1438.
4. Ziółkowski, J.; Łęgas, A. Problem of Modelling Road Transport. *J. Konbin* **2019**, *49*, 159–193. [[CrossRef](#)]
5. Cygan, Z. *Fundamentals of Economics of Motor Transport in the Army*; Ministry of National Defence: Warsaw, Poland, 1978; p. 75.
6. Jacyna, M. *Selected Problems of Modeling Transport. Systems*; Warsaw University of Technology Publishing House: Warsaw, Poland, 2009; p. 143.
7. Migdalski, J. *Reliability Engineering: Handbook*; ZETOM: Warsaw, Poland, 1992; Volume 2, p. 658.
8. Nowakowski, T. *Reliability of Logistic Systems*; Wrocław University of Science and Technology Publishing House: Wrocław, Poland, 2011; p. 102.
9. Lefebvre, M. *Basic Probability Theory with Applications*; Springer: New York, NY, USA, 2009; p. 103.
10. O’Connor, P.; Kleyner, A. *Practical Reliability Engineering*, 5th ed.; John Wiley & Sons, Ltd.: Chichester, UK, 2012; p. 19.
11. Pham, H. *Handbook of Reliability Engineering*; Springer-Verlag: London, UK, 2003; p. 651.

12. PN-93/N-50191: Polish Standard. *Electricity Glossary. Reliability; Quality of Service*, Polish Committee for Standardization: Warsaw, Poland, 1994.
13. Migdalski, J.; Bartoszewicz, J.; Bobrowski, D.; Ciechanowicz, K.; Dwiliński, L.; Jaźwiński, J.; Kalinowska, H.; Kiliński, A. Probabilistic Methods in Reliability. In *Reliability Handbook: Mathematical Basics*; Migdalski, J., Ed.; WEMA: Warsaw, Poland, 1982; p. 68.
14. Żurek, J.; Ziółkowski, J.; Borucka, A. A method for Determination of Combat Vehicles Availability by Means of Statistic and Econometric Analysis. In Proceedings of the 27th European Safety and Reliability Conference, Portoroz, Slovenia, 18–22 June 2017; pp. 2925–2933.
15. Karpiński, J.; Firkowicz, S. *Preventive Maintenance Policies of Technical Objects*; National Scientific Publishers: Warsaw, Poland, 1981; p. 85.
16. Kutz, M. (Ed.) *Handbook of Transportation Engineering*; McGraw-Hill Companies: New York, NY, USA, 2013; pp. 25–41.
17. Młyńczak, M.; Nowakowski, T.; Restel, F.; Werbińska-Wojciechowska, S. Problems of Reliability Analysis of Passenger Transportation Process. In Proceedings of the European Safety and Reliability Conference, Balkema, Leiden, 2–4 October 2011; pp. 1433–1438.
18. Fricker, J.D.; Whitford, R.K. *Fundamentals of Transportation Engineering. A Multimodal Systems Approach*; Pearson Education, Inc.: Upper Saddle River, NJ, USA, 2004; pp. 243–276.
19. Levinson, H.S. The Reliability of Transit Service: An Historical Perspective. *J. Urban. Technol.* **2005**, *12*, 99–118. [[CrossRef](#)]
20. Barabino, B.; Di Francesco, M.; Mozzoni, S. An Offline Framework for the Diagnosis of Time Reliability by Automatic Vehicle Location Data. *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.* **2016**, *18*, 583–594. [[CrossRef](#)]
21. Barabino, B.; Di Francesco, M.; Mozzoni, S. Time Reliability Measures in bus Transport Services from the Accurate use of Automatic Vehicle Location raw Data. *Qual. Reliab. Eng. Int.* **2017**, *33*, 969–978. [[CrossRef](#)]
22. Pulugurtha, S.S.; Imran, M.S. Modeling Basic Freeway Section Level-of-Service Based on Travel Time and Reliability. *Case Stud. Transp. Policy* **2020**, *8*, 127–134. [[CrossRef](#)]
23. Zhao, L.; Guan, H.; Zhang, X.; Zhao, P.; Wang, P. Study on Travel Time Reliability Considering Route Travel Time Boundary. *J. South. China Univ. Technol.* **2019**, *47*, 127–135.
24. Tu, Q.; Cheng, L.; Sun, C.; Tang, F.; Li, M. Reliability-based Network Equilibrium Model with Truncated Stochastic Travel Time. *J. Southeast. Univ.* **2020**, *50*, 175–181.
25. Zheng, L.; Hensher, D.A.; Rose, J.M. Willingness to Pay for Travel Time Reliability in Passenger Transport: A Review and some New Empirical Evidence. *Transp. Res. Part. E Logist. Transp. Rev.* **2010**, *46*, 384–403.
26. Chakrabarti, S. The Demand for Reliable Transit Service: New Evidence Using Stop Level Data from the Los Angeles Metro Bus System. *J. Transp. Geogr.* **2015**, *48*, 154–164. [[CrossRef](#)]
27. Nam, D.; Park, D.; Khamkongkhun, A. Estimation of Value of Travel Time Reliability. *J. Adv. Transp.* **2005**, *39*, 39–61. [[CrossRef](#)]
28. Barabino, B.; Lai, C.; Casari, C.; Demontis, R.; Mozzoni, S. Rethinking Transit Time Reliability by Integrating Automated Vehicle Location Data, Passenger Patterns, and Web Tools. *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.* **2016**, *18*, 756–766. [[CrossRef](#)]
29. Bell, M.G.H.; Schmöcker, J.-D. Network Reliability: Topological Effects and the Importance of Information. In Proceedings of the 3rd International Conference on Traffic and Transportation Studies, Guilin, China, 23–25 July 2002; pp. 453–460.
30. D’Este, G.M.; Taylor, M.A.P. Network Vulnerability: An Approach to Reliability Analysis at the Level of National Strategic Transport Networks. In Proceedings of the 1st International Symposium on Transport Network Reliability, Kyoto, Japan, 31 July–1 August 2001; pp. 23–44.
31. Prashker, J.N. Direct Analysis of the Perceived Importance of Attributes of Reliability of Travel Modes in Urban Travel. *Transportation* **1979**, *8*, 329–346. [[CrossRef](#)]
32. Yatskiv, I.; Pticina, I.; Savrasovs, M. Urban Public Transport System’s Reliability Estimation Using Microscopic Simulation. *Transp. Telecommun.* **2012**, *13*, 219–228. [[CrossRef](#)]
33. Bazaraa, M.S.; Jarvis, J.J.; Sherali, H.D. *Linear Programming and Network Flows*, 4th ed.; John Wiley & Sons Inc.: New York, NY, USA, 2010; p. 748.
34. Kececioglu, D.B. *Reliability Engineering Handbook*; DEStech Publications: Lancaster, PA, USA, 2002; Volume 1, p. 62.

35. Macha, E.; Niesłony, A. *Reliability of Mechatronic Systems. Academic Handbook*; Opole University of Technology Publishing House: Opole, Poland, 2010; pp. 27–45.
36. Rausand, M.; Høyland, A. *System Reliability Theory, Models, Statistical Methods and Applications*, 2nd ed.; John Wiley & Sons Inc.: New Jersey, NJ, USA, 2004; p. 148.
37. Szkutnik-Rogoż, J.; Ziółkowski, J. Determine Transportation Costs with Using Octave 3.4.3. In *Research Approach in Logistics Processes and Transport Systems*; Warsaw University of Technology Publishing House: Warsaw, Poland, 2016; pp. 531–542.
38. Woropay, M.; Landowski, B.; Żurek, J. Operational Availability of the Executive Subsystem in the Transport System within Serial Changing Maintenance Stages. *Mach. Exploit. Issues* **2004**, *39*, 87–100.
39. Birolini, A. *Reliability Engineering Theory and Practice*, 3rd ed.; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1999; p. 298.
40. Młynarski, S. Problems of Definition of Reliability in Machines and Vehicles Operating. *J. Mach. Constr. Maint.* **2003**, *2*, 165–174.
41. Korzan, B. *Reliability Theory Elements*; Military University of Technology: Warsaw, Poland, 1986; p. 21.
42. Niziński, S.; Żółtowski, B. *Information Management Systems for the Operation of Technical Object*; MARKAR-B.Ż: Bydgoszcz, Poland, 2001; p. 146.
43. Bobrowski, D. *Models and Mathematical Methods of Reliability Theory in Examples and Assignments*; Scientific and Technical Publishers: Warsaw, Poland, 1985; p. 188.
44. Kosma, Z. *Numerical Methods for Engineering Applications*; Radom University of Technology: Radom, Poland, 1999; p. 263.
45. Gil, A.; Segura, J.; Temme, N.M. Numerical Evaluation of Airy-Type Integrals Arising in Uniform Asymptotic Analysis. *J. Comput. Appl. Math.* **2020**, *371*, 112717. [[CrossRef](#)]



© 2020 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Application of the Bloch-Schmigalla Method to Optimize the Organization of the Process of Repairing Unmanned Ground Vehicles

Jerzy Małachowski^{1*}, Jarosław Ziólkowski¹, Joanna Szkutnik-Rogoż¹, Aleksandra Łęgas¹, Mateusz Oszczypała¹

¹ Faculty of Mechanical Engineering, Military University of Technology, ul. gen. Sylwestra Kaliskiego 2, 00-908 Warsaw 46, Poland

* Corresponding author's e-mail: jerzy.malachowski@wat.edu.pl

ABSTRACT

The aim of this paper was to present the application of the Bloch-Schmigalla method in order to deploy work stations and create a military equipment repair model under field conditions. Proper allocation of repair stations is of crucial importance from the point of view of a given material's flow optimization. The aim of proper object allocation is such use of space that enables continuous, efficient and safe work. On the basis of numerical data, the advantages of using the Bloch-Schmigalla method for the optimal location of repair positions were presented. The proposal to optimize the organization of the repair process with using the Bloch-Schmigalla method entails multiple advantages e.g. decreasing the volume of transport activity size or time saving resulting from the rational arrangement of repair stations for unmanned ground vehicles.

Keywords: logistics, Bloch-Schmigalla method, equilateral triangles method

INTRODUCTION

The technological progress and dynamics regarding the changes occurring both in the operational environment as well as the possible methods and scenarios for conducting combat operations open up new and broad possibilities for the use of Unmanned Ground Vehicles (UGV) [5, 8, 11, 15, 16, 18, 22, 23, 24, 25], called robots. The special arguments in favor of UGV are the minimization of human losses, caused by the reduction of the risk of a direct threat to the health and life of a soldier through the use of robots in the modern battlefield. Additional arguments are: autonomy [17] and increasing the possibilities of sub-branches through the additional potential that UGV have. It concerns both the combat means [5, 22, 23] as well as supplies [18, 24] and equipment for the contemporary robots often specialized for specific tasks [25, 26]. The scope of the set

of tasks carried out by UGV is a wide spectrum of their possibilities, ranging from patrolling the area, detecting explosives (mainly booby traps) and *Improvised Explosive Devices* (IED). In addition, the set of tasks also includes reconnaissance, detection of the position and movement of the opponent, as well as broadly understood logistical support. Such solutions are dedicated mainly to the pedestrian subunits performing tasks in difficult terrain [11, 15, 16, 19, 22] or even for the special forces units. In the latter case, UGV may become particularly important given the very high unit cost of training a commando compared to a professional soldier. However, one should be aware of the fact that the robots adapted to perform tasks by formations of special forces units will be subject to a number of additional, often strict criteria. Therefore, at the current stage of UGV development, it is difficult to clearly determine in which direction the development of robots

should proceed, i.e. whether towards highly specialized facilities and dedication to specific tasks, e.g. only reconnaissance, carrying explosives, logistical support or rather evolution should follow towards universal constructions with modular characteristics, enabling any robot configuration covering a wide spectrum of possibilities (intervention tasks, reconnaissance, transport or logistics support).

In an effort to reduce or completely eliminate casualties, unmanned ground vehicles (UGV) are increasingly often used instead of soldiers. Progressing robotization significantly influences the change in the ways of fighting [5, 8]. It is anticipated that in the future the battlefield will be dominated by ground vehicles and robots, as a consequence of which the man's participation in the armed conflict will be limited only to control over properly adapted robots and to monitor the course of activities [12, 16, 19]. Due to the autonomy of operation, the following classification of objects is adopted:

- remote-controlled by an operator equipped with sensors and navigation devices (*human in the loop*),
- semi-autonomous, requiring prior programming, supervision and acceptance of the target by the operator who finally decides about the mission (*human on the loop*),
- internally autonomous, ensuring the achievement of the goal without human intervention (*human out of the loop*),
- fully autonomous network-centric, the operation of which is based on receiving a command from the communications network and transferring it to a group of objects to perform a specific task (*Network – Centric Autonomous Ground Vehicles*) [5, 8].

Unmanned ground vehicles include the robotic sets designed, among others, to carry out the following tasks:

- transport, including the transport of ammunition, weapon systems, additional equipment intended to support operations, especially in harmful and dangerous conditions,
- detection, neutralization and removal of hazardous materials, e.g. IED,
- reconnaissance to provide the information about the detected dangerous objects and weapon systems of the enemy,

- control and inspection, e.g. monitoring and protection against threats,
- evacuation of soldiers from the places which are difficult to reach or exposed to direct enemy action,
- making passages in engineering dams and other natural and artificial terrain obstacles,
- providing automated steering center for other unmanned land platforms [5, 8, 11, 16, 18, 22, 23].

REPAIR OF MILITARY EQUIPMENT UNDER FIELD CONDITIONS

The repairs of the military equipment (ME) are carried out in order to restore the technical fitness or technical service life resources. The scope of repairs depends on the scale of work and time necessary to carry them out. Repair detachments and mobile technical security elements perform military equipment repairs under field conditions within the scope and time determined by the superior or resulting from the character of their operations. The military equipment can be qualified for repair or included as irrecoverable loss depending on the extent of destruction or the size and nature of the damage. The basic criterion for qualifying ME in combat operations is the expected labor output of removing the detected damage. Repairs of the land technique can be divided according to a five-point scale, depending on the performance capabilities of the execution detachments and repair units [4, 6].

The following methods of repairing military equipment are distinguished under field conditions:

- a) socket – a repair detachment performs a comprehensive repair of equipment at the place of mass damage or at the damaged equipment collection point,
- b) service – a unit responsible for carrying out the repairs moves to the equipment damage location, where comprehensive repair is carried out,
- c) element replacement – damaged assemblies, subassemblies and parts are replaced with technically efficient ones,
- d) individual – consisting proper mounting of a repaired element to the same ME,
- e) mixed – a combination of the presented methods [7].

REQUIREMENTS FOR UGV AND EXAMPLES OF USED ROBOTS

In accordance with the assumptions of the *Robotics and Autonomous Systems (RAS)* publication, the main task of which is to determine the requirements of the US Army in the development of unmanned ground vehicles, more and more attention is focused on the autonomy of operations and cooperation with unmanned and manned weapon systems. Ground vehicles should be characterized by high mobility and the ability to perform tasks in difficult to reach terrain with varied surface. The most frequently determined minimum values of the parameters ensuring mobility depending on the size and weight of unmanned ground vehicles include [5, 8]:

- gradeability with a 60% gradient,
- traveling on a slope with a 40% gradient,
- overcoming vertical obstacles with the height of 600 mm,
- crossing trenches with the width of 1000 mm,
- minimum speed of about 30 km/h.

A specially designed suspension system, the use of efficient drive systems and appropriate weight distribution should ensure high UGV maneuverability and the ability to make turns in

place or even the possibility of climbing stairs [12, 16, 19]. The use of hybrid propulsion systems can contribute to obtaining high torque and simultaneously reducing the noise level. Currently, the research on the legitimacy of using lighter and more efficient lithium-sulfur instead of lithium-ion batteries is being conducted. A properly selected power source provides the right energy balance for the electronic and optoelectronic systems of unmanned ground vehicles. Another very important structural element which should be characterized by failure-free operation is the environment recognition system, which includes, e.g. laser scanners, vision cameras, GPS systems, radars and location sensors. The most important challenge for ground robots will be self-reliant identification of the opponent and the ability to make decisions without the operator’s interference. Table 1 presents the examples of unmanned ground vehicles depending on their weight, maximum range and the specificity of tasks performed.

When planning the organization of military equipment repairs based on the socket method, many methods are available to ensure the most favorable allocation of areas and workstations in the field. These methods include the Bloch-Schmigalla method, which is used for the optimal allocation of repair stations.

Table 1. Examples of used unmanned ground vehicles [Based on Depczynski 2017]

No.	ULP	Weight [kg]	Maximum range [m]	Specification
1	TMZ set	35	600	- reconnaissance - deactivation of dangerous objects
2	Scarab	50	350	- reconnaissance - patrolling
3	TM-5 set	50	600	- reconnaissance - deactivation and destruction of hazardous materials - transport
4	MRK-27 BT	170	500	- fire support
5	Waran	190	1000	- engineering recognition - deactivation of dangerous objects
6	Platform M	800	1500	- reconnaissance - fighting live force and equipment - fire support - patrolling - sapper - supply transport
7	MRK-61	800	600	- liquidation of the consequences of technical failures of devices with radioactive, biological and chemical materials
8	Szatun	1000	5 000	- fire support - reconnaissance - transport as part of the support of airborne-amphibious units
9	Wolk 2	1100	5 000	- fire support - reconnaissance - patrolling - strengthening the system of protection and defense of strategic ballistic missile launchers
10	BAS-01GBM Soratnik set	7000	10 000	- reconnaissance - patrolling - sapper - supply transport - evacuation of wounded

BLOCH-SCHMIGALLA METHOD

The Schmigalla triangles method is an approximate, stepwise method with unlimited choice of location on the nodes of a regular triangle grid. It is designed for spatial location of repair stations in such a way, so that the points between which there is the highest flow of a given material are so close to each other as possible [1, 3, 9, 14]. These points are placed on the triangle grid, which makes it possible to develop an optimal allocation of even a large number of such points. Distributing the points on a grid of equilateral triangles is the basis for the further planning of spatial allocation of objects. The application of the Bloch-Schmigalla method allows better organization of transport, flow of material, information or people, through shortening the distances between points characterized by the highest movement intensity [2, 13]. This method was elaborated by W. Bloch from Switzerland, and further developed and modified in 1968 by H. Schmigalla. The essence of this method is the distribution of the objects in a triangle grid disregarding the size, assuming the same distance between the objects [2, 20].

The primary aim of object allocation in the logistics system is to improve the flow of material goods. In order to create an analytic model, the following assumptions should be made:

- a) technological connections between the objects being located are known and established in advance,
- b) there is freedom in choosing the object allocation,
- c) there are no connections between the objects with fixed location and the objects being localized.

The object allocation model adopted the following designations:

- m – number of allocated objects ($i = 1, 2, \dots, m$),
- c_{ij} – technological connections of the objects, quantities characterizing the flow rate of cargo between i -th and j -th object ($i = 1, 2, \dots, m$),
- d_{pq} – links between locations, distance between p -th and q -th object location ($p, q = 1, 2, \dots, m$),
- x_{ip}, x_{jq} – deterministic variables, location of object i -th and j -th, at point p -th and q -th respectively.

Solving the object allocation problem in a logistics system comes down to finding the values of variables:

$$\{x_{ip}\}; i, p = 1, 2, \dots, m$$

which would satisfy the following criterion function:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m c_{ij} d_{pq} x_{ip} x_{jq} = \min \quad (1)$$

with the following restrictions:

$$\sum_{i=1}^m x_{ip} = 1; p = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{p=1}^m x_{ip} = 1; i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

$$x_{ip} = \begin{cases} 1, & \text{if object } i \text{ is in the place of object } p \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

The presented c_{ij} coefficients may concern the mass of transported materials, the number of transport batches, as well as transport operations m of the objects related to the flow of materials and information [10, 14, 18, 21].

It is assumed that the optimal object allocation on the equilateral triangle grid takes place when the objective function “W” reaches the minimum value. The objective function expresses the product of the flow rate of any factor (e.g. damaged equipment) and its displacement distance.

The objective function can be expressed with the formula:

$$W = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N S_{ij} L_{ij} \rightarrow \min \quad (5)$$

where: S_{ij} – connections between object i and object j ,

L_{ij} – distance (measured in adopted modular units) between object i and object j [4].

The calculation process in the Bloch-Schmigalla method is carried out in two steps:

1. determining the order in which positions will be placed,
2. selection of locations for individual positions [14].

ALGORITHM FOR THE PROCEEDINGS

Determining the number of N objects and technological connections between them is the most important step. Next, through converting the link matrix, the sequence of allocating in the triangle grid is determined, starting from the element S_{ij} with the highest value, which indicates a pair of objects inter-linked the most. This pair of objects is placed in the central location of the equilateral triangle grid. In the event of many such pairs, the one with the most links to all objects has priority. The next step is to determine a successive object with the highest number of with objects selected to be allocated or those which had already been allocated. The next object after the first pair, if it is linked with two objects, is placed in the node, thus creating an equilateral triangle. If it has a connection with only one object, then it is placed in an adjacent node. The basis for locating the next object in the grid is the minimum sum of connections between the objects which had been already allocated. The arrangement of the objects should be presented graphically. After arranging all the objects on the triangle grid, a distance matrix is prepared and the value of the objective function is determined [20]. In the Schmigalla triangles method, the result of calculations is the allocation of positions to the locations and the shape of the surface on which each position should be spaced. The task is to determine the method of placing repair stations at which the amount of transport work understood as the sum of the product of the weight of transported materials and the distance will be minimal.

The following designations of individual repair stations for unmanned ground vehicles were adopted:

1. damage assessment area,
2. area for repairing engineering reconnaissance

- equipment,
3. night vision equipment repair area,
4. powertrain repair area,
5. control system repair area,
6. fire support equipment repair area,
7. video camera repair area,
8. chassis repair area,
9. chemical recognition sensor repair area.

The matrix of technological connections occurring between the work stations for unmanned ground vehicles is presented in Table 2. Table 3 indicates a pair of objects with the highest value of technological connections. The maximum value is 75, corresponding to a pair of elements 1 and 4, which means that the most common cause of unmanned ground vehicle failure were powertrain failures. Next, the sum of link intensity between the allocated and non-allocated objects was calculated and the results are illustrated in Table 4. The next object with the highest value of technological connections with objects already allocated is object 8. Following the presented scheme, the sum of the intensity of connections between the considered repair stations was calculated and the results are illustrated in Table 5.

The subsequent object with the most connections is object 3, for which the most advantageous location on the grid of equilateral triangles should be determined. Figure 1 illustrates nine suggestions for the locations of the night vision equipment repair station. Next, the transport activity size should be calculated for all nine potential locations of the third object, which is illustrated in Table 6. Table 6 may suggest that the third object should be located in the place marked V (compared location shown in Figure 1). The above situation is illustrated in Figure 2.

After placing the next object with the highest sum of technological connections to the already

Table 2. Technological connections between the repair stations

Station	Technological connections between stations								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		19	13	75	20	18	24	60	11
2	19		10	16	70	21	18	52	27
3	13	10		70	20	29	11	36	60
4	75	16	70		10	8	8	60	70
5	20	70	20	10		28	9	60	10
6	18	21	29	8	28		32	24	11
7	24	18	11	8	9	32		8	10
8	60	52	36	60	60	24	8		18
9	11	27	60	70	10	11	10	18	

Table 3. Indication of the link with the highest value

Station	Technological connections between stations								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		19	13	75	20	18	24	60	11
2	19		10	16	70	21	18	52	27
3	13	10		70	20	29	11	36	60
4	75	16	70		10	8	8	60	70
5	20	70	20	10		28	9	60	10
6	18	21	29	8	28		32	24	11
7	24	18	11	8	9	32		8	10
8	60	52	36	60	60	24	8		18
9	11	27	60	70	10	11	10	18	

Table 4. Determination of the value of connections between the allocated stations and the remaining ones and indication of the next position with the highest value

Station	Technological connections between stations								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		19	13	75	20	18	24	60	11
2	19		10	16	70	21	18	52	27
3	13	10		70	20	29	11	36	60
4	75	16	70		10	8	8	60	70
5	20	70	20	10		28	9	60	10
6	18	21	29	8	28		32	24	11
7	24	18	11	8	9	32		8	10
8	60	52	36	60	60	24	8		18
9	11	27	60	70	10	11	10	18	
Sequence									
1		19	13		20	18	24	60	11
4		16	70		10	8	8	60	70
Σ		35	83		30	26	32	120	81

located objects, it is necessary to recalculate the sum of the intensity between the non-allocated and allocated objects (compared data presented in Table 7). The procedure should be repeated until all repair stations have been placed on the triangle grid. Table 7 shows that the chemical recognition sensors repair station should be located in the place marked IV (compared location shown in Figure 2). The above-mentioned situation is presented in Figure 3.

Table 8 shows that the second object should be located in the place marked VIII (compared location shown in figure 3). Figure 4 shows the allocation of six workstations. Table 9 calculates the transport activity size for the eight repair stations located to determine the latest location of the station marked with number 7. After applying this procedure, the optimal organization of all repair stations for unmanned ground vehicles was illustrated in Figure 5.

As a result, the Bloch-Schmigalla method has led to the determination of the optimal location of repair stations for unmanned ground vehicles in such a way that ensures the development of space so that the work could be realized continuously, efficiently and the points which are characterized with the highest value of technological connection were located as close to each other as possible.

CONCLUSIONS

Originally, the main purpose of using robots was to reduce the risk of casualties among own troops and to ensure the realization of tasks regardless of the combat environment. Currently, the main intended use of unmanned ground vehicles manufactured in many armies is to increase the military combat capabilities. Progressive robotization of the battlefield can contribute to

Table 5. Determination of the value of technological connections between repair stations

Station	Technological connections between stations								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		19	13	75	20	18	24	60	11
2	19		10	16	70	21	18	52	27
3	13	10		70	20	29	11	36	60
4	75	16	70		10	8	8	60	70
5	20	70	20	10		28	9	60	10
6	18	21	29	8	28		32	24	11
7	24	18	11	8	9	32		8	10
8	60	52	36	60	60	24	8		18
9	11	27	60	70	10	11	10	18	
Sequence									
1		19	13		20	18	24	60	11
4		16	70		10	8	8	60	70
Σ		35	83		30	26	32	120	81
8		52	36		60	24	8		18
Σ		87	119		90	50	40		99
3		10			20	29	11		60
Σ		97			110	79	51		159
9		27			10	11	10		
Σ		124			120	90	61		
2					70	21	18		
Σ					190	111	79		
5						28	9		
Σ						139	88		
6							32		
Σ							120		
7									

reducing the risk of casualties by using UGV in reconnaissance, sapper or patrol operations. The Russian experience related to participation in the conflict in December 2015 in the Syrian province of Latakia, confirm the possibility of using remotely controlled combat robots to carry out the missions previously reserved only for a man. The problem associated with robotization of the battlefield may be the determination of the allowed level of autonomy of the terrestrial robot, which

could independently make decisions to start or stop operations, simultaneously correctly interpreting the principles of international humanitarian law of armed conflicts.

The paper presents the application of the Bloch-Schmigalla method for optimizing the organization of the process of repairing unmanned ground vehicles. The essence of the Bloch-Schmigalla method is the allocation of repair stations in the triangle grid omitting their actual size, on the understanding that the distances between repair stations should be equal. The only real limitation of the described method in practice may be the varied size of allocated unmanned

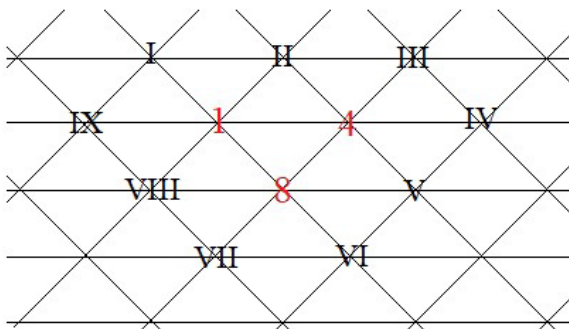


Fig. 1. Indication of possible nodes for the placement of the third object

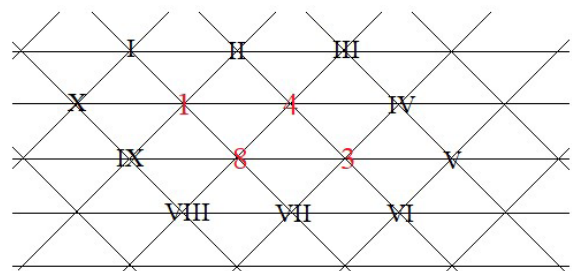


Fig. 2. Location of the next object

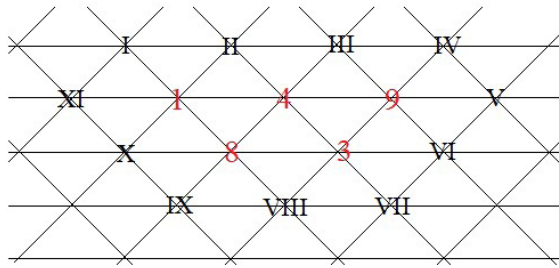


Fig. 3. Location of the ninth object

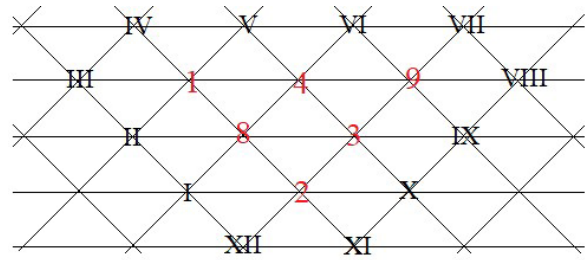


Fig. 4. Indication of possible nodes for the placement of the next object

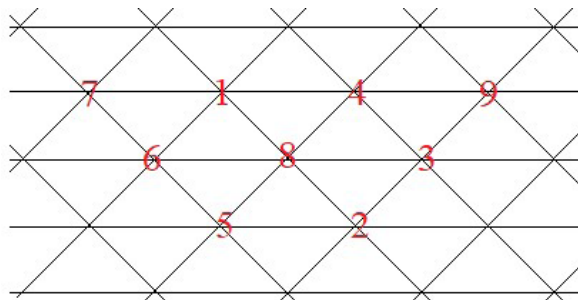


Fig. 5. Arrangement of all repair stations

ground vehicles or a naturally limited allocation area. However, the presented negative effects of using the method are not so significant, because they can be compensated by rather uncomplicated calculations and the possibility to correct the obtained result. The proposal to optimize the organization of the repair process using the Bloch-Schmigalla method entails numerous advantages, such as decreasing the volume of the transport activity size or time saving resulting from the rational arrangement of repair stations for unmanned ground vehicles.

Table 6. Determination of the transport activity size and indication of the next station's location

Transport activity size									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	13	13	26	26	26	26	26	13	13
4	140	70	70	70	70	140	140	140	140
8	72	72	72	72	36	36	36	36	72
Σ	225	155	168	168	132	202	202	189	225

Table 7. Determination of the transport activity size and indication of the next repair station

Transport activity size										
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	11	11	22	22	33	33	22	22	11	11
4	140	70	70	70	140	140	140	140	140	140
8	36	36	36	36	36	36	18	18	18	36
3	180	120	120	60	60	60	60	120	120	180
Σ	367	237	248	188	269	269	240	300	289	367

Table 8. Determination of the transport activity size and indication of the next work station

Transport activity size											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1	19	19	38	57	57	57	57	38	38	19	19
4	32	16	16	32	32	32	32	32	32	32	32
8	104	104	104	156	156	104	104	52	52	52	104
3	30	20	20	20	20	10	10	10	20	20	30
9	81	54	27	27	27	27	54	54	81	81	81
Σ	266	213	205	292	292	230	257	186	223	204	266

Table 9. Determination of the transport activity size and indication of the next work station

Transport activity size													
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
1	24	24	24	48	72	72	72	72	72	72	72	48	48
4	16	16	8	8	8	16	16	16	24	24	24	24	24
8	16	16	16	16	24	24	16	16	16	16	16	16	16
3	33	33	22	22	22	22	11	11	22	22	33	33	33
9	30	30	20	10	10	10	10	20	30	30	40	40	40
2	54	54	54	54	54	54	36	18	18	18	36	36	54
5	18	27	27	27	36	36	27	18	18	9	9	9	18
6	32	64	64	96	128	128	96	96	96	64	64	32	32
Σ	223	264	235	281	354	362	284	267	296	255	294	238	265

Acknowledgements

The article was written as part of the implementation of the university research grant supported by Military University of Technology (No 747/WAT/2020).

REFERENCES

- Babac S., Belić, D. Permaculture Zone Planning Using the Triangular Method. *Electronic Journal of the Faculty of Civil Engineering Osijek-e-GFOS*, 17, 2018, 100–110.
- Banduka N., Mladineo M., Eric M. Designing a layout using Schmigalla method combined with software tool vistable. *International Journal of Simulation Modelling* 16(3), 2017, 375–385.
- Belic D., Kunica Z., Opetuk T., Goran D. Optimization of the Plant Layout in the Production of the Special Transformers – Case Study, *FME Transactions* 46, 2018, 285–290.
- D-4(B) Doktryna logistyczna Sił Zbrojnych Rzeczypospolitej Polskiej, Szt. Gen. 888/2014, Bydgoszcz 2014.
- Dąbrowski M. Roboty lądowe na polu walki, *Przegląd Sił Zbrojnych nr 1/2019*, Wojskowy Instytut Wydawniczy, 2019.
- DD 4.22 Zabezpieczenie techniczne SZ RP. Zasady funkcjonowania, Bydgoszcz 2012.
- DD 4.22.10 Zasady i organizacja obsługi i naprawy sprzętu w warunkach polowych, Bydgoszcz 2013.
- Depczyński M. Robotyzacja pola walki, *Przegląd Sił Zbrojnych nr 5/2017*, Wojskowy Instytut Wydawniczy, 2017.
- Ficko M., Palcic I. Designing a layout using the modified triangle method, and genetic algorithms. *International Journal of Simulation Modelling* 12(4), 2013, 237–251.
- http://mfiles.pl/pl/index.php/Metoda_Blocha-Schmigalli (available at 24.07.2019).
- Israeli robot expert: West 10 years ahead of “enemy” in warfare technology, <http://www.jpost.com/Business-and-Innovation/Israeli-robotics-expert-West-10-years-ahead-of-enemy-in-warfare-technology-435494> (available at 30.06.2017).
- Korgul P., Konopka S., Łopatka M.J. Accuracy Control Studies of Engineer Robot Manipulator of Serial-to-Parallel Kinematic Structure. *Proceeding of 23rd International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2018* October 2018, 498–502.
- Krolczyk J. B., Krolczyk G. M., Legutko S., Napierkowski J., Hloch S., Foltys J., Tama E. Material flow optimization – a case study in automotive industry. *Tehnicki vjesnik* 22(6), 2015, 1447–1456.
- Lis S., Santarek K. *Projektowanie rozmieszczenia stanowisk roboczych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1980.
- Łopatka M. J. Heavy robots for C-IED operations. *1st International Scientific Conference and Live Firing Show on Challenges to National Defence in the Contemporary Geopolitical Situation (CND-CGS)*. Lithuania 2018, 60–66.
- Łopatka M. J., Muszyński T., Polis W. Modułowe lekkie bezzałogowe platformy lądowe wsparcia. *Szybkobieżne pojazdy gąsienicowe*, 3(45), 2017, 33–48.
- Malon, K., Łopatka, J., Rykała, Ł., Łopatka, M. Accuracy analysis of UWB based tracking system for unmanned ground vehicles. *Proceedings of the International Conference on New Trends in Signal Processing, NTSP 2018, Demanovska Dolina, Slovakia 2018*, 99–105.
- Massey K. *Squad Mission Equipment Transport (SMET). Lessons Learned for Industry*, NDIA Ground Robotics Capability Conference 2016.
- Mierczyk Z. (red.) *Nowoczesne technologie systemów uzbrojenia*. Wojskowa Akademia Techniczna, 2008.
- Mikołajczyk Z. *Techniki organizatorskie*

- w rozwiązywaniu problemów zarządzania. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002.
21. Potocki A. Zastosowanie metody H. Schmi-galli do optymalizacji rozmieszczenia stanowisk biurowych. Zeszyty Naukowe AE, Kraków 105/1987.
 22. Russian military is reading for robot wars, International military review, <https://southfront.org/russian-military-is-readying-for-robot-wars/> (available at 30.06.2017).
 23. Syrian army use military robots made in Russia, <http://www.fort-russ.com/2015/12/syrian-army-use-military-robots-made-in.html> (available at 30.06.2017).
 24. Łopatka, M.J., Muszynski, T. Analysis of Dis-mounted Operation Support with Robots. Conference Proceedings Challenges to National Defence in the Contemporary Geopolitical Situation – CND-CGS’ 2018, Lithuania 2018, 25–27.
 25. Łopatka, M.J., Muszynski, T. Future Robots Using in C-IED Detection. Conference Proceedings Challenges to National Defence in the Contemporary Geopolitical Situation – CND-CGS’ 2018, Lithuania 2018, 25–27.
 26. Łopatka, M.J., Sterniczuk, D. Concept of the Manipulators Set for Fast IEDs Neutralization. (2018) AIP Conference Proceedings, 2029, art. no. 020037.

Article

Mathematical Programming and Solution Approaches for Transportation Optimisation in Supply Network

Joanna Szkutnik-Rogoż , Jarosław Ziółkowski , Jerzy Małachowski *  and Mateusz Oszczypała 

Faculty of Mechanical Engineering, Institute of Mechanics and Computational Engineering, Military University of Technology, gen. Sylwestra Kaliskiego 2, 00-908 Warsaw, Poland; joanna.szkutnik@wat.edu.pl (J.S.-R.); jaroslaw.ziolkowski@wat.edu.pl (J.Z.); mateusz.oszczypala@wat.edu.pl (M.O.)

* Correspondence: jerzy.malachowski@wat.edu.pl

Abstract: The problem of transport is a special type of mathematical programming designed to search for the optimal distribution network, taking into account the set of suppliers and the set of recipients. This article proposes an innovative approach to solving the transportation problem and devises source codes in GNU Octave (version 3.4.3) to avoid the necessity of carrying out enormous calculations in traditional methods and to minimize transportation costs, fuel consumption, and CO₂ emission. The paper presents a numerical example of a solution to the transportation problem using: the northwest corner, the least cost in the matrix, the row minimum, and Vogel's Approximation Methods (VAM). The joint use of mathematical programming and optimization was applicable to real conditions. The transport was carried out with medium load trucks. Both suppliers and recipients of materials were located geographically within the territory of the Republic of Poland. The presented model was supported by a numerical example with interpretation and visualization of the obtained results. The implementation of the proposed solution enables the user to develop an optimal transport plan for individually defined criteria.

Keywords: transportation optimization; CO₂ emissions; mathematical modeling; programming; code verification



Citation: Szkutnik-Rogoż, J.; Ziółkowski, J.; Małachowski, J.; Oszczypała, M. Mathematical Programming and Solution Approaches for Transportation Optimisation in Supply Network. *Energies* **2021**, *14*, 7010. <https://doi.org/10.3390/en14217010>

Academic Editor: Tseng King Jet

Received: 30 August 2021
Accepted: 18 October 2021
Published: 26 October 2021

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

It is particularly important to be able to optimize road transport operations and to use economic theories to solve transportation problems. In literature, problems related to the reduction of computational complexity of the transportation algorithms using, e.g., the C++ programming language or the Matlab environment, were repeatedly addressed. However, it must be acknowledged that they require the user to have a thorough knowledge of the functions available and be proficient in their use. A GNU Octave also allows to use programming techniques, generate new user functions, or perform complex numerical calculations. So far, determining the optimal solution of the transportation problem using programming in GNU Octave was not studied. Therefore, the aim of this article was to devise source codes in free GNU Octave (version 3.4.3) environment to minimize transportation costs, fuel consumption, and CO₂ emission.

1.1. Transportation of Materials in Supply Network

From a mathematical point of view, transportation problems have a wide range of applications in logistic systems [1]. Service network design problems arise wherever there is a need to determine cost minimizing routes and schedules, given the constraints on resource availability and level of service [2]. In [3], an agent-based simulation model studying the evolution of a coalition over time taking into account various trust-related issues was developed. Providing efficient distribution systems for services became a challenging issue for logistics companies. Mixed delivery approach, which combines attended home delivery

(AHD) and shared delivery locations (SDL) usage in an innovative way, was proposed in [4]. In real-life situations, the traditional transportation problems deals with issues such as transportation costs, selection of delivery routes, selection of production places, or reduction of carbon emissions [5–8]. Indeed, it is necessary to plan the transportation of materials within the supply network rationally and optimally [9]. In the case of a balanced transportation problem, the balance between supply and demand is assumed. Due to the practical nature of the problem and the effectiveness of the methodology, the transportation algorithm is often used [10–12]. The paper [13] is concerned with the design of efficient exact and heuristic algorithms for addressing a bilevel network pricing problem, where demand is a nonlinear function of travel cost. Metaheuristic approach for solving transportation problem with fixed costs associated to the routes was presented in [14]. In distribution networks, rational transport management also requires organizational efforts related to the dynamics and type of tasks [15–17]. The costs of transport tasks should be optimized using methods and tools used not only in commercial solutions [18–20]. The literature often addresses cases aimed at developing the most effective method of solving transportation problems according to time or cost, while using the available IT tools [21,22]. In the paper [23] one of the first basic transportation problem was formalized, which was then further developed in [24], and then expanded even more in [25] by using the simplex method. There are a number of methods leading to a basic feasible solution to the transportation problem. The most common methods used to support the decision making process are: the northwest corner method, the row minimum method, the least cost in the matrix, and VAM method (Vogel's Approximation Method).

1.2. Modifications of Existing Methods

An innovative method of solving the transport problem based on the northwest corner method is described in the paper [26]. The authors, by deliberately modifying the cost matrix before applying the northwest corner method, proved that the proposed solution positively influences the effectiveness of the method by reducing the number of iterations performed. In [27], an analysis was made of the number of steps necessary to determine the optimal transport problem using the northwest corner method, the minimum cost method, and the VAM method. The subject of the research were transport cost matrices with dimensions of 5×5 , 10×10 , 20×20 , 40×40 , 80×80 , 160×160 , 320×320 , while the values of supply and demand were generated in a random way from a set of numbers from 5 to 50,000. On the basis of the obtained results, it was found that the number of iterations required to obtain an optimal solution when using the northwest corner method in the case of matrices with dimensions of 320×320 is as much as six-times higher than when using the minimum cost method or the VAM method. In [28], an alternative method of solving the balanced transport problem, so-called TCM (Tuncay Can Approximation Method), based on the geometric average of transportation costs, was used. A novel method called KSAM (Karagul–Sahin Approximation Method) used to find an initial solution to the transportation problem was proposed in [29]. The solutions obtained by KSAM were as good as the solutions obtained with the VAM method and as fast as the northwest corner method. In [30] the MOMC method (Maximum Supply with Minimum Cost) was used and the results were compared with three classical methods, i.e., the northwest corner method, the minimum cost method and the VAM method. The MOMC method provides a solution that minimizes the objective function and offers a computational advantage in the form of faster data processing and reduced memory usage. The article [31] analyses the VAM method and proposes how to improve it by using the total alternative cost matrix and alternative allocation costs. Both parametric and nonparametric statistical tests available in the MINITAB-15 statistical package were used in the calculations. In [32], the limitations resulting from the use of the Vogel approximation were discussed and an improved LD-VAM algorithm (Logical Development of Vogel's Approximation Method) providing a lower objective function value than the VAM method was developed. The paper [33]

proposes an ATM (Allocation Table Method) method leading to a basic feasible solution with a lower transportation cost than the solution obtained with traditional algorithms.

1.3. Reduction of Computational Complexity Using the C++ Programming Language

In article [34], a new heuristic method called TOC (Total Opportunity-Cost Method) was proposed to determine the basic feasible solution to the transportation problem, and the results obtained were compared with the classical VAM method. In the publication [35], several variants of the VAM method were analyzed taking into account the concept of Total Opportunity-Cost Method (TOC). Based on the calculations carried out, using the programming language Turbo C++, it was found that the classic VAM method combined with the Total Opportunity-Cost method, the so-called VAM-TOC, results in an optimal or close to optimal solution. Implementation of C++ programming language is also described in [36]. Using the JHM method (Juman & Hoque Method), 18 transportation problems were solved, 11 of which were taken from the literature, and 7 were generated at random. The calculations show that the JHM method in as many as 16 problems considered resulted in a minimum transport cost being determined. In [37], the transportation problem was solved using the northwest corner, minimal cost, the row minimum method, the least cost in the matrix, and the VAM methods. The calculations were carried out in two ways, i.e., by using traditional methodology and object-oriented programming. Due to the need to perform a number of iterations leading to the solution of the problem in question, the C++ programming language was used.

1.4. Practical Application of the Matlab Environment in Transportation Problems

In the literature, there are many solutions to the transportation problem that use the Matlab software. In the paper [38], the problem of transport of chemical substances for a pharmaceutical company using the northwest corner method was analyzed. The Matlab software was also used in [39]. Proposed solution based on the Vogel's Approximation and Modified Distribution Method would ease the computation of different problems, especially when the problem has a larger cost matrix. In [40], the validity of using the Matlab package was proven not only due to the high efficiency of the algorithm used, but also due to the reduction of time necessary to perform the calculations. In addition, the implementation of the proposed procedure makes it possible to solve the traveling salesman problem. The descriptions of algorithms based on the northwest corner method, the minimum cost method, the VAM method, and the MODI method are included in [41]. The proposed approach emphasizes the superiority of computer programming methods over classical analytical methods.

1.5. Sustainable Transport

Considerable attention is paid to minimizing transport costs with strictly defined supply and demand volumes. However, it should be remembered that during the transport process, the values of both supply and demand can vary over time. The transportation costs to develop a new supplier–retailer inventory model, under the condition that the supplier and the retailer have adopted the two-level trade credit policy, were discussed in article [42]. In [43], a model for taking stock costs into account was defined to determine the lower and upper limit of total transportation costs in a situation of changing supply and demand. The calculations were done using the Matlab software (version 7.10). The significance of the impact of demand variability on the minimization of the supply chain costs is discussed in [44]. The work focuses on optimizing the vehicle speed not only to reduce the transportation costs, but also to reduce carbon emissions while taking into account the variability of demand. The Matlab software was also used for the calculations. The paper [45] presented an analysis of the variability of exhaust emissions from conventional, hybrid, and electric vehicles. The possibility of reducing risks in the supply chain and of using the compound Poisson process was proposed as a possible further research direction. A similar subject was addressed in the paper [46], which explained that rational adjustment

of vehicle speeds can offer not only financial but also environmental benefits by reducing carbon dioxide emissions.

1.6. Multicriteria Decision Making Processes

The literature also often addresses issues related to the multicriteria decision making process. In the paper [47] the optimal transport and logistics solution was determined, concerning the distribution of home appliance goods from China to warehouses located in Poland, while ensuring the most favorable conditions for both the manufacturing company and the customers. An integral part of the logistic system is the subsystem of movement and transportation, the aim of which is to ensure the timely and efficient movement of personnel, equipment and supplies in crisis situations. Logistics and transportation simulations that can be used to provide insights into potential outcomes of proposed military deployment plans were presented in [48]. The system of transporting military cargo by means of road transport in peacetime is characterized by high stability. During the period of exercises or combat operations, the high pace of operations requires the commanders to make an effort to monitor and continuously modify the supply routes.

Comparison of research contributions between our paper and related articles was presented in Table 1. The use of our code in GNU Octave allows for effective management of vehicles and for determining optimal distribution plan within supply chain. Moreover, an easy adaptation of the source code could be implemented in other linear programming problems.

Table 1. Comparison of transportation problems in this paper and related articles.

Problem Chosen from	Cost	CO ₂	Time	C++	Matlab	GNU Octave
Our paper	✓	✓	–	–	–	✓
[1]	–	–	✓	–	–	–
[6]	✓	✓	–	–	–	–
[14]	✓	–	–	–	–	–
[15]	–	–	✓	–	–	–
[18]	✓	–	–	–	–	–
[26]	✓	–	–	–	–	–
[27]	✓	–	–	–	–	–
[29]	✓	–	–	–	–	–
[30]	✓	–	–	–	–	–
[32]	✓	–	–	–	–	–
[33]	✓	–	–	–	–	–
[35]	✓	–	–	✓	–	–
[36]	✓	–	–	✓	–	–
[37]	✓	–	–	✓	–	–
[38]	✓	–	–	–	✓	–
[39]	✓	–	–	–	✓	–
[40]	✓	–	–	–	✓	–
[41]	✓	–	–	–	✓	–
[44]	✓	✓	–	–	–	–
[46]	✓	✓	–	–	–	–
[49]	✓	–	–	–	–	–
[50]	✓	✓	–	✓	–	–

2. Theoretical Backgrounds for Mathematical Model Development

A transportation problem where total supply is equal to aggregated demand is called a balanced transportation problem. Otherwise, it is an unbalanced transportation problem. Every unbalanced transportation problem can be converted to a balanced transportation problem by adding an artificial supplier or recipient [51,52]. The needs of each recipient as well as the resources of each supplier are known. The distribution of the product should be planned so that transportation costs are minimal [49,53]. The notations used to formulate this problem are presented in Table 2.

Table 2. List of variables.

Notations	Details
$F_{obj}(X, C)$	The objective function whose arguments are cost matrix and basic feasible solution,
$F_{zdeg}(X)$	The degeneration function whose arguments are base elements,
X	The matrix of the feasible solution to the transportation problem,
x_{ij}	Number of units to be transported from the i -th supplier to the j -th recipient,
C	The transportation cost matrix,
C_{NW}	The total transportation cost for the northwest corner method,
C_{MKW}	The total transportation cost for the row minimum method,
C_{MK}	The total transportation cost for the least cost in the matrix method,
C_{VAM}	The total transportation cost for the Vogel's approximation method,
c_{ij}	The transportation cost from the i -th supplier to the j -th recipient,
m	Total number of supply nodes, number of suppliers,
n	Total number of demand nodes, number of recipients,
a_i	The resource of the i -th supplier, $a_i > 0, i = 1, \dots, m$,
a_{NW}	The new value of supply for the northwest corner method,
a_{MKW}	The new value of supply for the row minimum method,
a_{MK}	The new value of supply for the least cost in the matrix method,
a_{VAM}	The new value of supply for the Vogel's approximation method,
b_j	The demand of the j -th recipient, $b_j > 0, j = 1, \dots, n$,
b_{NW}	The new value of demand for the northwest corner method,
b_{MKW}	The new value of demand for the row minimum method,
b_{MK}	The new value of demand for the least cost in the matrix method,
b_{VAM}	The new value of demand for the Vogel's approximation method,
r_i	The difference between the lowest and second lowest cost $c_{ij} > 0$ in each row in C ,
s_j	The difference between the lowest and second lowest cost $c_{ij} > 0$ in each column in C .

The transportation problem can be stated mathematically as a linear programming problem. The objective function described in the formula in Equation (1) minimizes the total cost of transportation between suppliers and recipients:

$$F_{obj}(X, C) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}. \quad (1)$$

Subject to Equations (2) and (3):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (3)$$

where $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

If total demand is equal to aggregated supply then the relationship in Equation (4) can be noted as:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (4)$$

The feasible solution to the transportation problem is the matrix $X = [x_{ij}]$ that meets the conditions (2) and (3), while the optimal solution is a feasible solution that minimizes the objective function (1). The matrix $X = [x_{ij}]$ is referred to as the basic feasible solution to the transportation problem relative to base set B if:

$$(i, j) \notin B \Rightarrow x_{ij} = 0. \quad (5)$$

The variables $\{x_{ij} | (i, j) \in B\}$ and $\{x_{ij} | (i, j) \notin B\}$ are called base and nonbase variables, respectively, in relation to set B . The next steps of the transportation algorithm are shown below:

1. Determine the base set B and basic feasible solution $X_B = [x_{ij}^B]$,

2. Determine the zero matrix $C_B = [c_{ij}^B]$ equivalent to the cost matrix $C = [c_{ij}]$ in relation to the base set B ,
3. For one of the unknowns, take any value u_1, u_2, \dots, u_m and v_1, v_2, \dots, v_n :
 - (a) other unknowns are to be determined by solving the equation system $c_{ij} + u_i + v_j = 0$ for $(i, j) \in B$,
 - (b) determine $c_{ij}^B = c_{ij} + u_i + v_j$ where $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.
4. Check if the matrix C_B is non-negative. If $C_B \geq 0$ then X_B is the optimal solution. Otherwise, go to step 4.
5. Determine a new base set B_1 and the corresponding basic feasible solution $X_{B_1} = [x_{ij}^{B_1}]$:
 - (a) designate a node (k, l) meeting the condition $c_{kl}^B = \min_{(i,j)} c_{ij}^B$,
 - (b) determine the cycle Γ contained in the set $B \cup \{(k, l)\}$. This cycle should be divided into a positive and a negative semicyclical Γ_1 and Γ_2 , where Γ_1 is in the (k, l) ,
 - (c) designate a node (p, q) semi-cyclical Γ_2 meeting the condition $x_{pq}^B = \min_{(i,j) \in \Gamma_2} x_{ij}^B$,
 - (d) assume $B_1 = B \cup \{(k, l)\} - \{(p, q)\}$,
 - (e) determine $X_{B_1} = [x_{ij}^{B_1}]$ from the formula:

$$x_{ij}^{B_1} = \begin{cases} x_{ij}^B + x_{pq}^B & \text{for } (i, j) \in \Gamma_1 \\ x_{ij}^B - x_{pq}^B & \text{for } (i, j) \in \Gamma_2 \\ x_{ij}^B & \text{for } (i, j) \notin \Gamma \end{cases}$$

6. Go to step 2.

The transportation algorithm is presented in the form of a flowchart in Figure 1.

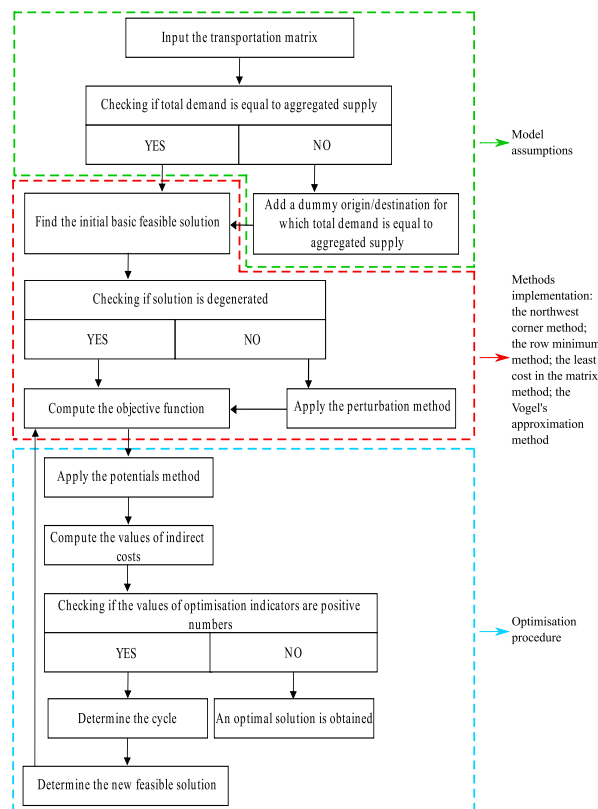


Figure 1. Flowchart of transportation problem.

3. Methods

3.1. The Northwest Corner Method

The northwest corner method, otherwise known as the upper-left corner method, provides a feasible solution to the considered transportation problem. It does not take into account the transport cost matrix, which may result in high cost of the solution. It consists of subsequent assignment of appropriate values to variables, each time for routes located in the upper left-hand corner of the transport table [54]. It is necessary to come up with a plan for the transport of products from $i = 1, \dots, m$ suppliers to $j = 1, \dots, n$ recipients in such a way as to ensure minimum transportation costs, with no more than a_i of the product at each point of delivery and no less than b_j of the product at each point of receipt. Transportation takes place along the planned arcs connecting the delivery vertices with the collection vertices (the route from the i -th supplier to the j -th recipient), forming a directed transport network in which the unit transportation costs along each arc are calculated c_{ij} . The solution technique by the northwest corner method is presented as Algorithm 1.

Algorithm 1 Pseudocode for the Northwest Corner Method

Input: m, n, c_{ij}, a_i, b_j
Output: $C_{NW}, F_{zdeg}(X)$
 $a_{NW} \leftarrow a_i$
 $b_{NW} \leftarrow b_j$
while $i \leq m; j \leq n$
 The first non-zero element x_{ij} is located in the first cell in the northwest corner in matrix X
calculate: the minimum value among supply or demand for the first cell in the northwest corner $X = \min(a_{NW}, b_{NW})$
 the new value of supply $a_{NW} = a_{NW} - X$
 the new value of demand $b_{NW} = b_{NW} - X$
 if the new value $a_{NW} = 0$ **then** the remaining cells in this column should be filled with 0
 endif
 if the new value $b_{NW} = 0$ **then** the remaining cells in this row should be filled with 0
 endif
 the next non-zero elements x_{ij} are located in the next cells in the northwest corner in matrix X
endwhile
calculate: total transportation cost for the northwest corner method
 $C_{NW} = F_{obj}(X, C)$ and the number of basic variables $F_{zdeg}(X)$
check: degeneration of the solution
 if $F_{zdeg}(X) = m + n - 1$ **then** solution is degenerated
 else solution is non-degenerated
 endif

Six suppliers located in towns: Zlocieniec, Wesola, Gizycko, Rzeszow, Krakow and Brzeg have 24, 31, 19, 49, 40, 37 loading units, respectively. Eight recipients located geographically in the territory of the Republic of Poland presented in Figure 2 placed an order for 18, 29, 15, 34, 26, 21, 36, 21 loading units respectively. The transportation model was represented by the network shown in Figure 3. The arcs represent the routes linking the destinations and sources.

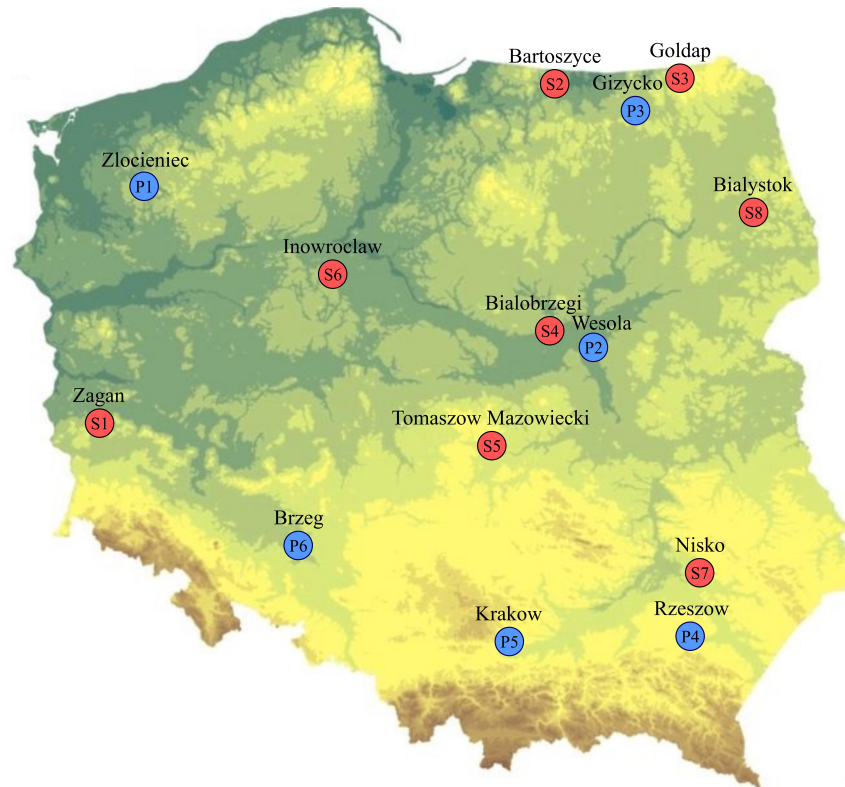


Figure 2. Location of suppliers and recipients in territory of Poland.

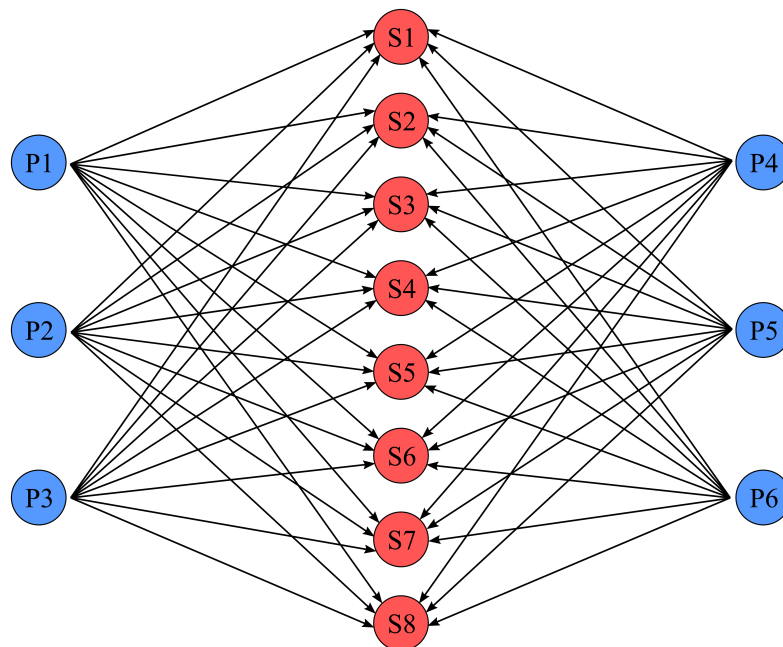


Figure 3. Network structure of transportation problem.

Taking into account dynamic and necessity to act in crisis situations, analysis of the transportation costs was based on military guidelines and the decision of Chief of the Inspectorate for Armed Forces Support from 19 February 2020. The transport is to be carried out with medium load trucks for which the following unit cost factors were adopted:

- amortisation €1.20,

- maintenance €0.97,
- engine fuels and lubricants €0.44.

The total cost index per exploitation unit is €2.62. Data for numerical problem are presented in Table 3.

Table 3. Transportation table for numerical example.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Demand
S1	736.0	1400.0	1647.0	1504.0	1063.0	545.0	18
S2	1011.0	674.0	197.0	1556.0	1478.0	1400.0	29
S3	1349.0	791.0	156.0	1608.0	1530.0	1660.0	15
S4	1271.0	267.0	882.0	596.0	648.0	908.0	34
S5	1193.0	337.0	1037.0	674.0	622.0	700.0	26
S6	545.0	648.0	895.0	1530.0	1115.0	674.0	21
S7	1712.0	726.0	1219.0	156.0	493.0	1193.0	36
S8	1764.0	506.0	415.0	1089.0	1245.0	1375.0	21
Supply	24	31	19	49	40	37	

At the beginning a table should be prepared with the dimension of m —columns (number of suppliers) and n —lines (number of recipients) taking into account the demand and supply constraints:

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} &= 18, \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} &= 29, \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} &= 15, \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} &= 34, \\
 x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} &= 26, \\
 x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} &= 21, \\
 x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} &= 36, \\
 x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} + x_{85} + x_{86} &= 21, \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} &= 24, \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} + x_{82} &= 31, \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} + x_{83} &= 19, \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + x_{74} + x_{84} &= 49, \\
 x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} + x_{75} + x_{85} &= 40, \\
 x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} + x_{76} + x_{86} &= 37.
 \end{aligned}$$

To solve the transportation problem using the GNU Octave software (Version 3.4.3/John W. Eaton, Madison, WI, USA), it is necessary to input the following values: the number of suppliers, the number of recipients and the transportation costs from the i -th supplier to the j -th recipient. In addition, it is necessary to determine demand and supply. Using the northwest corner method, table completion should start with the first cell in the left corner, which corresponds to specific supply and demand values. In the next step, the lower value from among them should be selected and entered in the field corresponding to the first cell of the left corner, and then both supply and demand should be reduced by the value entered. For the first cell, supply assumes a value of 24, while demand is 18. A smaller value is 18, so in the next step, the first cell was supplemented with 18, after which it was subtracted from both supply and demand. At the same time, the software checks which of the demand or supply values is equal zero. If the demand takes a zero value, then the remaining cells in the row under consideration should be completed with zeros. In case the supply would be zeroed, the remaining cells of the column would have to be

filled with zeros. Following the same procedure in the next steps, the feasible solution presented in Table 4 was obtained. All nonzero elements are called base elements, while zero elements are called nonbase elements. The solution is degenerated when the number of base elements is $m + n - 1$ meaning $8 + 6 - 1 = 13$. Obtaining an undegenerated solution will make it impossible to check the optimality of the solution using the potential method.

Table 4. Results of subsequent iterations and feasible solution for northwest corner method.

step 13						
	18	0	0	0	0	0
	6	23	0	0	0	0
	0	8	7	0	0	0
	0	0	12	22	0	0
	0	0	0	26	0	0
	0	0	0	1	20	0
	0	0	0	0	20	16
	0	0	0	0	0	21

Transportation cost was computed by using the objective function described in Equation (1). The calculations resulted in a degenerated solution for which the total cost of transport was €165,109.0. Computational source code written in Notepad++ and generated in GNU Octave for finding the basic feasible solution using Northwest Corner Method is given in Appendix A. Lines from 1 to 112 are common to each method. The command window also displays information about the value of the objective function, the number of the base elements, and the degeneration of the received solution.

3.2. The Row Minimum Method

The row minimum method consists of selecting the elements of the C-cost matrix, for which the cost c_{ij} in the first row is minimal. The indicated c_{ij} element corresponds to the value x_{ij} , from which the construction of the base matrix $X = [x_{ij}]$ starts. Then, the arcs corresponding to the zero elements of the transformed cost matrix are selected. To determine the initial feasible solution, it is necessary to supplement the X matrix with elements corresponding to arcs with the lowest unit transportation costs in the subsequent rows. Completing the results table using the row minimum method consists of comparing transportation costs and the corresponding values of supply and demand starting from the first row. The solution technique by the row minimum method is presented as Algorithm 2.

The lowest cost in the first row is 545.0, with the demand of 18 and supply of 37. In the next step both supply and demand were reduced by 18, resulting in a zero value for demand, as a consequence the remaining cells of the first row were supplemented with zeroes. Following the same procedure in the next steps, the feasible solution presented in Table 5 was obtained.

Table 5. Results of subsequent iterations and feasible solution for row minimum method.

step 13						
	0	0	0	0	0	18
	0	10	19	0	0	0
	0	15	0	0	0	0
	0	6	0	28	0	0
	0	0	0	0	26	0
	21	0	0	0	0	0
	0	0	0	21	14	1
	3	0	0	0	0	18

The value of the objective function determined using the row minimum method was lower than the value obtained using the northwest corner method. The calculations resulted in a degenerated solution for which the total cost of transport was equal to €119,478.0. The source code written in Notepad++ and generated in GNU Octave for finding the basic feasible solution using the row minimum method is given in Appendix B.

Algorithm 2 Pseudocode for the Row Minimum Method

```

Input:            $m, n, c_{ij}, a_i, b_j$ 
Output:         $C_{MKW}, F_{zdeg}(X)$ 
 $a_{MKW} \leftarrow a_i$ 
 $b_{MKW} \leftarrow b_j$ 
while            $i \leq m; j \leq n$ 
Find the element in the first row of the C matrix for which  $c_{ij}$  is minimal
Indicate element  $c_{ij}$  which corresponds to the first non-zero element  $x_{ij}$ 
calculate:     the minimum value among supply or demand for the  $x_{ij}$  in the first row of the C matrix
                    $X = \min(a_{MKW}, b_{MKW})$ 
                   the new value of supply  $a_{MKW} = a_{MKW} - X$ 
                   the new value of demand  $b_{MKW} = b_{MKW} - X$ 
                   if the new value  $a_{MKW} = 0$  then the remaining cells in this column should
                   be completed with 0
                   endif
                   if the new value  $b_{MKW} = 0$  then the remaining cells in this row should
                   be completed with 0
                   endif
                   the next non-zero elements  $x_{ij}$  (corresponding to the minimal value of costs in the
                   next rows of the C matrix) are located in the matrix X

endwhile
calculate:     total transportation cost for the row minimum method
                    $C_{MKW} = F_{obj}(X, C)$  and the number of basic variables  $F_{zdeg}(X)$ 
check:        degeneration of the solution
                   if  $F_{zdeg}(X) = m + n - 1$  then solution is degenerated
                   else solution is non-degenerated
                   endif

```

3.3. The Least Cost in the Matrix Method

This method consists in supplementing the table with routes with the lowest unit costs following the order of the non-decreasing sequence of values for unit costs of transport. The cost matrix should be transformed in such a way that there is at least one 0 value in each column and row. The minimum element in the row (column) under consideration should be subtracted from the elements in each row (column). Then, from the zero elements of the transformed cost matrix, the one for which the cost c_{ij} is the lowest should be selected. The c_{ij} element corresponds to the x_{ij} arc from which the base matrix $X = [x_{ij}]$ creation should be started. Then, the arcs corresponding to the zero elements of the transformed cost matrix are selected. To determine the basic feasible solution, it is necessary to supplement the X matrix with additional elements corresponding to arches with the lowest unit transportation costs. The solution technique by the least cost in the matrix method is presented as Algorithm 3.

The lowest cost is 156.0 with a demand of 15 and a supply of 19. In the next step, both supply and demand were reduced by 15, resulting in a zero value for demand, as a consequence of which the remaining cells of row three were also supplemented with zeroes. The result of the described scheme is presented in Table 6.

The calculations resulted in a degenerated solution for which the total cost of transport using the least cost in the matrix method amount to €114,888.0. The source code written in Notepad++ and generated in GNU Octave for finding the basic feasible solution using the least cost in the matrix method is given in Appendix C.

Table 6. Results of subsequent iterations and feasible solution for least cost in matrix method.

step 13						
0	0	0	0	0	0	18
3	0	4	0	3	0	19
0	0	15	0	0	0	0
0	31	0	3	0	0	0
0	0	0	0	26	0	0
21	0	0	0	0	0	0
0	0	0	36	0	0	0
0	0	0	10	11	0	0

Algorithm 3 Pseudocode for the Least Cost in the Matrix Method

```

Input:  $m, n, c_{ij}, a_i, b_j$ 
Output:  $C_{MK}, F_{zdeg}(X)$ 
 $a_{MK} \leftarrow a_i$ 
 $b_{MK} \leftarrow b_j$ 
while  $i \leq m; j \leq n$ 
  Find the element of the C matrix for which  $c_{ij}$  is minimal
  Indicate element  $c_{ij}$  which corresponds to the first non-zero element  $x_{ij}$ 
  calculate:
    the minimum value among supply or demand for the  $x_{ij}$  in the C matrix
     $X = \min(a_{MK}, b_{MK})$ 
    the new value of supply  $a_{MK} = a_{MK} - X$ 
    the new value of demand  $b_{MK} = b_{MK} - X$ 
    if the new value  $a_{MK} = 0$  then the remaining cells in this column
      should be completed with 0
    endif
    if the new value  $b_{MK} = 0$  then the remaining cells in this row should
      be completed with 0
    endif
    the next non-zero elements  $x_{ij}$  (corresponding to the minimal
    value of costs in the next rows/columns of the C matrix) are
    located in the matrix X
  endwhile
  calculate:
    total transportation cost for the least cost in the matrix method
     $C_{MK} = F_{obj}(X, C)$  and the number of basic variables  $F_{zdeg}(X)$ 
  check:
    degeneration of the solution
    if  $F_{zdeg}(X) = m + n - 1$  then solution is degenerated
    else solution is non-degenerated
    endif

```

3.4. The Vogel's Approximation Method

The VAM method takes into account the transportation cost matrix, thus making it possible to find a low-cost solution. The application of GNU Octave software to determine the optimal solution with VAM method is to calculate the ratios, i.e., the difference r_i and s_j between the lowest and second lowest cost options in each row and in each column, respectively. In the next step it is necessary to indicate the cell with the highest difference values $r_k = \max_i \{r_i\}$ and $s_l = \max_j \{s_j\}$. When $r_k < s_l$ the highest indicator corresponds to a column and then the lowest cost in the column under consideration should be indicated. If the highest difference would correspond to the row $r_k > s_l$ the lowest cost in the given row should be indicated. The solution technique by the Vogel's approximation method is presented as Algorithm 4.

Algorithm 4 Pseudocode for the Vogel's Approximation Method

Input: m, n, c_{ij}, a_i, b_j
Output: $C_{VAM}, F_{zdeg}(X)$
 $a_{VAM} \leftarrow a_i$
 $b_{VAM} \leftarrow b_j$
while $i \leq m; j \leq n$
calculate: Ratios $r_k = \max_i\{r_i\}$ and $s_l = \max_j\{s_j\}$ between the lowest and second lowest cost c_{ij} in each row and in each column
if $r_k < s_l$ **then** the lowest cost c_{ij} in the column under consideration should be indicated
else
the lowest cost c_{ij} in the row under consideration should be indicated
endif
Indicate the minimum element c_{ij} (in the column/row under consideration) which corresponds to the first non-zero element x_{ij}
calculate: the minimum value among supply or demand for the x_{ij} in the C matrix
 $X = \min(a_{VAM}, b_{VAM})$
the new value of supply $a_{VAM} = a_{VAM} - X$
the new value of demand $b_{VAM} = b_{VAM} - X$
if the new value $a_{VAM} = 0$ **then** the remaining cells in this column should be completed with 0
endif
if the new value $b_{VAM} = 0$ **then** the remaining cells in this row should be completed with 0
endif
The next nonzero elements x_{ij} (corresponding to the minimal value of costs in the subsequent rows/columns of the C matrix for which the maximum value of r_k or s_l was obtained) are located in the matrix X
endwhile
calculate: total transportation cost for the Vogel's approximation method
 $C_{VAM} = F_{obj}(X, C)$ and the number of basic variables $F_{zdeg}(X)$
check: degeneration of the solution
if $F_{zdeg}(X) = m + n - 1$ **then** solution is degenerated
else solution is non-degenerated
endif

The results obtained on the basis of the described scheme are shown in Table 7.

Table 7. Results of subsequent iterations and feasible solution for Vogel's Approximation Method (VAM).

step 13						
	0	0	0	0	0	18
	15	10	4	0	0	0
	0	0	15	0	0	0
	0	0	0	13	21	0
	0	0	0	0	19	7
	9	0	0	0	0	12
	0	0	0	36	0	0
	0	21	0	0	0	0

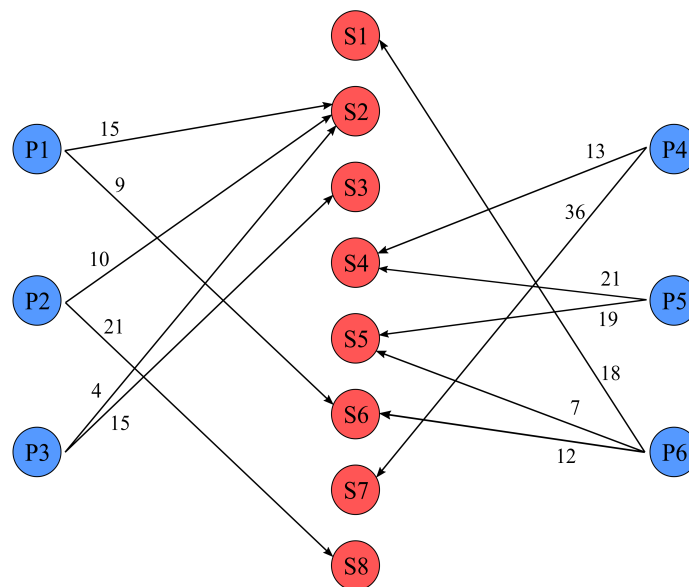
Total transportation costs with the VAM method amount to €102,152.0. The source code written in Notepad++ and generated in GNU Octave for finding the basic feasible solution using the VAM method is given in Appendix D. Algorithm in Appendix D was extended and in consequence allows for comparison of the number of iterations, the value of objective function and the degeneration of received solution, as presented in Table 8.

Table 8. Comparison of results obtained by using GNU Octave.

Final Comparison of Methods				
Method	NW	MKW	MK	VAM
The number of iterations	14	14	14	14
Total transportation cost (€)	165,109.0	119,478.0	114,888.0	102,152.0
Solution is degenerated	YES	YES	YES	YES

Abbreviation:
 NW—The Northwest Corner Method
 MK—The Least Cost in the Matrix Method
 MKW—The Row Minimum Method
 VAM—The Vogel's Approximation Method

When comparing the initial values of the basic solutions to the transportation problem in question, it should be noted that, depending on the method used, different objective function values were obtained. The calculations show that the highest transportation cost was estimated using the northwest corner method, while the least cost in the matrix method led to a lower value of transportation cost than the commonly used row minimum method. The lowest value of the objective function was obtained using the VAM method. In each of the presented methods, the necessary condition for degenerating a feasible solution was met. The lowest cost solution to the transportation problem within the supply network is presented in Figure 4.

**Figure 4.** Graphical interpretation of lowest cost solution.

The solution of transportation problem obtained by used methods and deviation from the lowest cost solution are summarized in Table 9. Solutions obtained by NW, MKW, and MK methods were not optimal, and therefore the potentials method was used.

Table 9. Objective function and deviation from lowest cost solution.

Method	Value (€)	Deviation from the Lowest Cost Solution (%)
NW	165,109.0	61.6
MKW	119,478.0	16.9
MK	114,888.0	12.4
VAM	102,152.0	0.0

4. Results

4.1. Optimization of the Basic Feasible Solution

Based on the input data set and the basic feasible solution obtained by the northwest corner method, the results table was first prepared so that the cells corresponding to supply and demand values remained empty. The transportation costs in the base cells were supplemented. It is assumed that the value of the potential is $Y_1 = 0$. The cost corresponding to this potential should be found and then the potential X_1 being the difference between the cost and Y_1 potential should be calculated. In the task, we obtained the following values $X_1 = 736 - Y_1 = 736$. The next cost in the column that corresponds to the X_1 should be found and the Y_2 should be determined. The Y_2 potential corresponding to the determined cost should be calculated as the difference between cost 1011 and potential X_1 . The procedure was repeated to determine the remaining potentials. The remaining cells should be filled in with the sums of potentials $X_t + Y_u$ where $t = 1, \dots, n$ and $u = 1, \dots, m$ keeping in mind that n is the number of recipients and m is the number of suppliers [55]. The results of the applied conversions are shown in Table 10.

Table 10. Summary of indirect costs and costs resulting from task content.

Indirect Costs						Transportation Costs							
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6								
736	399	-236	-521	-936	-236	$Y_1 = 0$	736	1400	1647	1504	1063	545	
736	399	-236	-521	-936	-236	$Y_2 = 275$	1011	674	197	1556	1478	1400	
1011	674	39	-246	-661	39	$Y_3 = 392$	1349	791	156	1608	1530	1660	
1128	791	156	-130	-545	156	$Y_4 = 1118$	1271	267	882	596	648	908	
1854	1517	882	596	182	882	$Y_5 = 1196$	1193	337	1037	674	622	700	
1932	1595	960	674	259	960	$Y_6 = 2051$	545	648	895	1530	1115	674	
2788	2451	1815	1530	1115	1815	$Y_7 = 1429$	1712	726	1219	156	493	1193	
2165	1828	1193	908	493	1193	$Y_8 = 1611$	1764	506	415	1089	1245	1375	
2347	2010	1375	1089	674	1375								

In the next step, the values of optimization indicators should be determined, understood as the difference between indirect costs and costs resulting from the numerical data. They are listed in Table 11.

Table 11. Values of optimization indicators for solution obtained using northwest corner method.

$X_1 = 736$	$X_2 = 399$	$X_3 = -236$	$X_4 = -521$	$X_5 = -936$	$X_6 = -236$	
0	-1001	-1883	-2025	-2000	-781	$Y_1 = 0$
0	0	-158	-1802	-2140	-1362	$Y_2 = 275$
-220	0	0	-1738	-2075	-1504	$Y_3 = 392$
584	1250	0	0	-467	-26	$Y_4 = 1118$
739	1258	-78	0	-363	259	$Y_5 = 1196$
2243	1802	921	0	0	1141	$Y_6 = 2051$
454	1102	-26	752	0	0	$Y_7 = 1429$
584	1504	960	0	-571	0	$Y_8 = 1611$

There are positive numbers among the indicators, which means that the solution obtained is not optimal. The cycle design leads to an feasible solution at a lower cost. The first element of the positive cycle corresponds to the maximum optimization indicator. In a row containing an element of a positive cycle, the component that will have its equivalent in the column should be indicated. The procedure should be repeated until the cycle is closed. The lowest value from the components of the negative cycle must then be indicated and subtracted from all components of the negative cycle and added to all components of the positive cycle. The created cycle and the new feasible solution are shown in Table 12.

Table 12. Cycle design and new feasible solution.

Cycle						New Feasible Solution					
18	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0
6(-)	23(+)	0	0	0	0	5	24	0	0	0	0
0	8(-)	7(+)	0	0	0	0	7	8	0	0	0
0	0	12(-)	22(+)	0	0	0	0	11	23	0	0
0	0	0	26	0	0	0	0	0	26	0	0
0(+)	0	0	1(-)	20	0	1	0	0	0	20	0
0	0	0	0	20	16	0	0	0	0	20	16
0	0	0	0	0	21	0	0	0	0	0	21

The cost of the current solution is €162,883.0, so it is slightly lower than the one obtained in the basic feasible solution, which means that the obtained solution is better. By repeating the above procedure 12 times, a new feasible solution was obtained. The feasible solution and the final values of the optimization indicators for the northwest corner method are presented in Table 13.

Table 13. New solution and optimization indicators.

New Feasible Solution						Optimization Indicators					
0	0	0	0	0	18	-1463	-6018	-9310	-4956	-2714	0
15	10	4	0	0	0	0	0	0	-2478	-1888	-1180
0	0	15	0	0	0	-1723	-720	0	-2903	-2313	-2549
0	0	0	13	21	0	-3068	-35	-5003	0	0	-826
0	0	0	0	19	7	-2832	-472	-5829	-472	0	0
9	0	0	0	0	12	0	-2006	-5298	-4484	-2360	0
0	0	0	36	0	0	-7080	-4130	-8543	0	-1298	-4130
0	21	0	0	0	0	-4189	0	-1758	-3009	-3717	-4307

All values of the optimization indicators are negative, so the received solution of €102,152.0 is optimal. The final transportation costs and the result of the potential method leading to an optimal solution are presented in Table 14.

Table 14. Comparison of methods and costs of solutions (€) obtained.

Method	NW	MKW	MK	VAM
Basic Feasible Solution	165,109.0	119,478.0	114,888.0	102,152.0
1st improvement of the solution	162,866.0	118,060.0	113,931.0	
2nd improvement of the solution	150,356.0	116,218.0	108,991.0	
3rd improvement of the solution	146,232.0	113,397.0	107,213.0	
4th improvement of the solution	138,616.0	106,665.0	105,503.0	
5th improvement of the solution	131,311.0	102,675.0	102,201.0	
6th improvement of the solution	124,333.0	102,201.0	102,152.0	
7th improvement of the solution	120,769.0	102,152.0		
8th improvement of the solution	118,600.0			
9th improvement of the solution	115,072.0			
10th improvement of the solution	112,349.0			
11th improvement of the solution	108,137.0			
12th improvement of the solution	102,152.0			

As can be seen from Table 14, the presented scheme of optimization of the obtained optimal solution was repeated:

- twelve times for the northwest corner method,
- seven times for the row minimum method,
- six times for the least cost in the matrix method,
- once for the VAM method.

Values of the transportation costs after subsequent steps of improvement are illustrated in Figures 5 and 6.

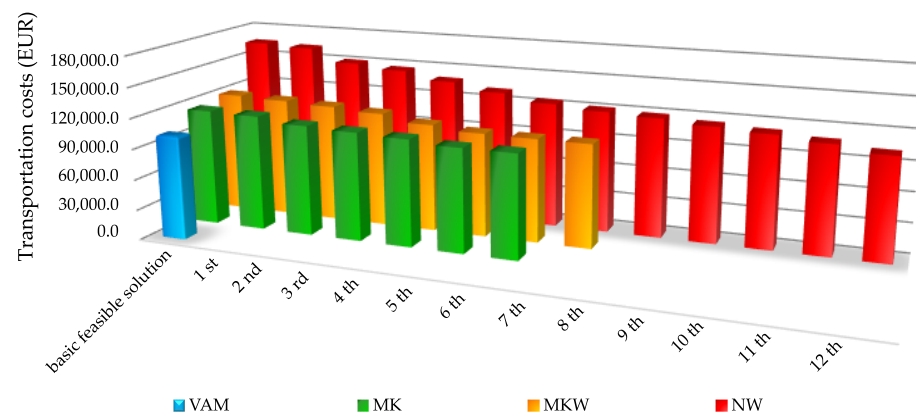


Figure 5. Next improvements of solutions.

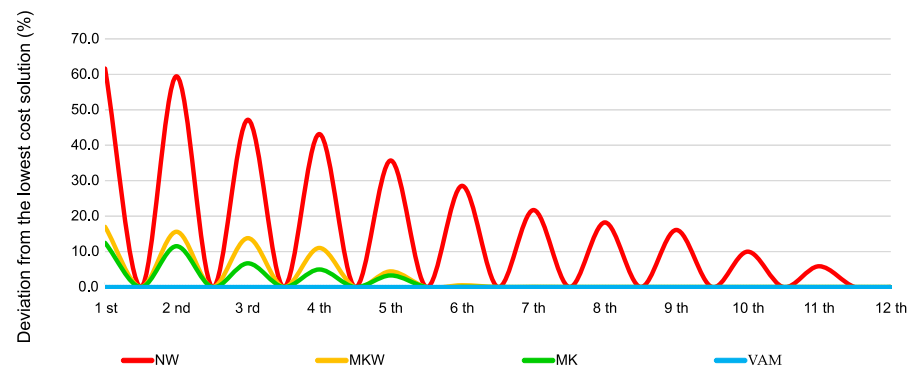


Figure 6. Deviation from optimal solution.

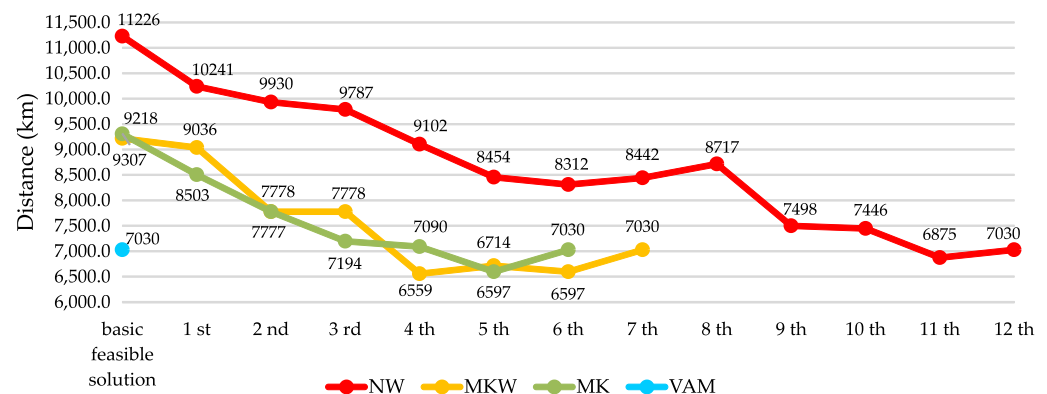
4.2. Fuel Consumption and CO₂ Emissions

The evolution of the transport system has a significant impact on the socioeconomic development of the modern world. The concept of sustainable transport takes into account not just economic and social criteria, but also environmental ones. Despite the significant role of the transport system in the development of the economy, transport has a negative impact on the quality of life and health of people, as well as on the environment due to its significant contribution to greenhouse gas emissions. International cooperation cannot be limited only to the expansion of the transport network (although this is an important aspect), but must also take environmental preservation into account. Sustainable transport development and environmental preservation are linked to the formation of a green transport system. Under the European Green Deal Communication [56], the European Union (EU) member states have committed to reducing greenhouse gas emissions by at least 55% by 2030, compared to 1990 levels. As part of the development of the market for low- and zero-emission vehicles, the European Commission has adopted the following targets for reducing CO₂ emissions from newly manufactured passenger cars and delivery vehicles: a 55% reduction in CO₂ emissions from passenger cars and a 50% reduction in CO₂ emissions from delivery vehicles by 2030; zero CO₂ emissions from new passenger cars by 2035. For new trucks, the target is to reduce CO₂ emissions by an average of 15% from 2025 and 30% from 2030 when compared to 2019 levels. CO₂ emissions from trucks, buses and coaches currently account for 6% of total EU CO₂ emissions and 27% of total road transport CO₂ emissions [57]. It is therefore necessary to adopt an environmentally friendly transport policy and to create tools to support decision-making processes, depending on the criteria adopted. Table 15 illustrates the total distance traveled expressed in (km), depending on the successive solutions obtained by the potential method.

Table 15. Distance traveled (km) depending on solution obtained.

Method	NW	MKW	MK	VAM
Basic Feasible Solution	11,226.0	9218.0	9307.0	7030.0
1st solution	10,241.0	9036.0	8503.0	
2nd solution	9930.0	7778.0	7777.0	
3rd solution	9787.0	7778.0	7194.0	
4th solution	9102.0	6559.0	7090.0	
5th solution	8454.0	6714.0	6597.0	
6th solution	8312.0	6597.0	7030.0	
7th solution	8442.0	7030.0		
8th solution	8717.0			
9th solution	7498.0			
10th solution	7446.0			
11th solution	6875.0			
12th solution	7030.0			

The calculations show that the basic feasible solution determined by the northwest corner method required the longest route of 11,226.0 (km). The optimal solution in terms of transport cost determined by the northwest corner method was not optimal in terms of total distance traveled. In the case of the least cost in the matrix method, the shortest distance required to complete the transport task equal to 6597.0 (km) was obtained as the result of the fifth iteration of the potential method. Of all the methods considered, the shortest route equal to 6559.0 (km) corresponded to the fourth iteration of the potentials method applied to the basic feasible solution determined by the row minimum method. A graphical interpretation of the results obtained is shown in the Figure 7.

**Figure 7.** Distance traveled (km) depending on different solutions obtained using potentials method.

The values of fuel consumption and CO₂ emissions depending on the distance traveled are presented in Table 16. The Vehicle Energy Consumption Calculation Tool (VECTO version 3.3.9.2175) was used to calculate them [58].

Implementation of the transport plan in accordance with the basic solution determined by the northwest corner method is associated with the highest CO₂ emissions of 4939.4 (kg). From an environmental point of view, the optimal solution offering the lowest CO₂ emission of 2886.0 (kg) was obtained using the row minimum method as a result of applying the potentials method four times. The resulting solution leads to a reduction in total CO₂ emissions by as much as 2053.5 (kg). The results of the performed calculations are shown in Figure 8.

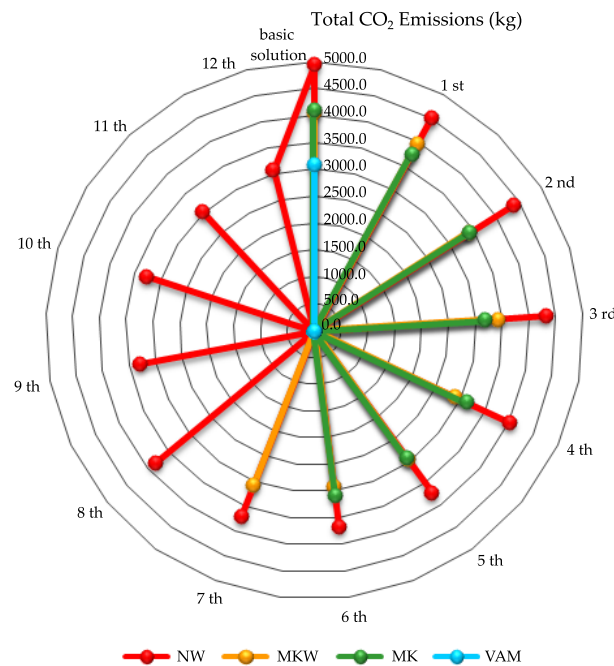


Figure 8. CO₂ emissions (kg) depending on solution obtained.

Table 16. Total fuel consumption and total CO₂ emissions as a function of distance traveled.

Method	Total Fuel Consumption (L)				Total CO ₂ Emission (kg)			
	NW	MKW	MK	VAM	NW	MKW	MK	VAM
Basic feasible solution	3143.3	2581.0	2606.6	1968.4	4939.4	4055.9	4095.1	3093.2
1st solution	2867.5	2530.1	2380.8		4506.0	3975.8	3741.3	
2nd solution	2780.4	2177.8	2177.6		4369.2	3422.3	3421.9	
3rd solution	2740.4	2177.8	2014.3		4306.3	3422.3	3165.4	
4th solution	2548.6	1836.5	1985.2		4004.9	2886.0	3119.6	
5th solution	2367.1	1879.9	1847.2		3719.8	2954.2	2902.7	
6th solution	2327.4	1847.2	1968.4		3657.3	2902.7	3093.2	
7th solution	2363.8	1968.4			3714.5	3093.2		
8th solution	2440.8				3835.5			
9th solution	2099.4				3299.1			
10th solution	2084.9				3276.2			
11th solution	1925.0				3025.0			
12th solution	1968.4				3093.2			

5. Discussion and Conclusions

The essential element of the logistic system is the subsystem of movement and transportation, whose main task is to ensure the timely movement of personnel and goods. The constant development of the automotive industry, the introduction of vehicles with increasing payloads and the ability to cross a variety of terrain, and the expansion of the road network indicate the growing importance of road transport. The dynamic change of the situation causes the distances of the supply routes to constantly change, which requires organizational effort. It is particularly important to be able to optimize the operations of road transport, especially when the time to make decisions is limited. There are many studies available in the literature concerning the optimization of the transportation problem depending on the established objective function, while taking into account the existing constraints.

The solutions used are aimed not only at determining the best method of solving the transportation problem, but also at developing an algorithm that leads to a reduction of calculation complexity by reducing the time needed for completing the calculations. The literature repeatedly addressed the possibilities of using the C++ programming language or

the Matlab environment to increase the efficiency of the transportation algorithm, whereas division of source codes in GNU Octave was not yet research subject. More and more tools are now available for using programming techniques or performing complex numerical calculations, including a free GNU Octave environment. Determining the optimal solution of the transportation problem using the GNU Octave software was not yet considered in any publication. Therefore, the purpose of this article was to present an innovative approach to solving the transportation problem aimed at minimizing the transportation costs, fuel consumption, and CO₂ emissions using programming in the GNU Octave.

Proposed solution using the GNU Octave has great practical and theoretical importance. The programming in GNU Octave saves a lot of time from complex and iterative calculations. The solutions used are aimed not only at determining the best method of solving the transportation problem, but also at decision support for individually defined criteria in other linear programming problems. The presented model was supported by a numerical example together with an interpretation of the results obtained. The paper focuses on determining the optimal method of product distribution within an assumed supply network using: the northwest corner, the least cost in the matrix, the row minimum and the Vogel Approximation Method (VAM) methods to calculate the minimal value of the objective function. A distribution network consisting of six suppliers and eight recipients of materials was considered. The transport was carried out with medium load trucks for which the cost ratio per unit of operation was €2.62.

On the basis of the calculations carried out, it was found that determining the basic feasible solution for each of the presented methods required 14 iterations. When comparing the initial basic solutions of the problem in question, the values of the objective function varied according to the method used. The analysis shows that the highest cost of transport was obtained using the northwest corner method, which is the simplest to calculate but the least accurate. In turn, the least cost in the matrix method provided a lower value of the objective function than the commonly used row minimum method. The lowest transportation cost was obtained by means of the Vogel approximation. For each of the methods used, the necessary condition for the degeneration of the calculated feasible solution was met, which made it possible to apply the potentials method. Determining the optimal solution based on the northwest corner method required as much as twelve repetitions of the scheme for calculating the optimization indicators. The negative values of the optimization indicators were obtained in the case of the row minimum method after seven repetitions of the scheme. The application of the least cost in the matrix method required six repetitions of the potential method.

The evolution of the transport system has a significant impact on the socioeconomic development of the world. However, it should be emphasized that despite economic growth, transport has a negative impact on the environment through its significant contribution to greenhouse gas emissions. Therefore, it is necessary to implement a proecological transport policy and to develop tools to support rational decision-making depending on the criterion adopted. We propose one such tool, provided in the form of attached source codes, only requiring the user to enter numerical data. Taking into account the ecological aspect, it was observed that the implementation of the transport task in accordance with the basic feasible solution obtained from the northwest corner method results in a total of 4939.4 (kg) of CO₂ being emitted into the atmosphere, while the application of the fourth iteration of the potentials method in relation to the row minimum method reduces CO₂ emissions to 2886.0 (kg), which amounts to 58.0%. The optimal solution obtained in this way reduces the total CO₂ emissions by as much as 2053.3 (kg).

The implementation of the proposed solution shortens the calculation algorithm and allows the user to determine the optimal distribution plan for material resources for individually determined criteria. The advantage of the software used is that the GNU Octave command window displays the individual steps leading to the basic feasible solution for each of the methods presented. In addition, an attempt by the user to enter negative numbers generates a message that the entered values must be changed. Moreover,

the source code for each of the methods checks whether the distribution network under consideration is a so-called balanced transportation problem. The disadvantage of the software used is that if the user inputs the data incorrectly, it is necessary to reinput all data again.

The use of IT tools allows effective management of the vehicle fleet and provides the possibility of organizing the workload of drivers to perform initial calculations of the costs at the planning stage of the transport operations. The increasing computing power of computers provides the ability to solve increasingly complex decision-making problems. Therefore, the right direction of further research will be to extend the function of the program with an algorithm based on the potentials method and to use the Gnuplot graphic tool to visualize the results in the form of a graph of the optimal distribution network.

Author Contributions: Conceptualization, J.M. and J.S.-R.; methodology, J.Z. and J.S.-R.; software, J.S.-R.; validation, J.S.-R.; formal analysis, J.M. and J.S.-R.; investigation, J.S.-R.; resources, J.S.-R. and J.Z.; data curation, J.S.-R. and M.O.; writing—original draft preparation, J.S.-R.; writing—review and editing, J.S.-R.; visualization, J.S.-R.; supervision, J.S.-R. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: This research received no external funding.

Institutional Review Board Statement: Not applicable.

Informed Consent Statement: Not applicable.

Data Availability Statement: Not applicable.

Acknowledgments: This work was supported by Military University of Technology (project No.878/WAT/2021). This support is gratefully acknowledged.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Appendix A

```

1  printf('SOLUTION OBTAINED BY THE NORTHWEST CORNER METHOD')
2  % OBJECTIVE FUNCTION
3  function cost=cost(T,c)
4  cost = 0;
5  m = columns(T);
6  n = rows(T);
7  for i=1:m
8  for k=1:n
9  cost = cost+T(k,i)*c(k,i); %sum of the unit costs of transport and volume of cargo from the suppliers
10 to the recipients
11 endfor
12 endfor
13 endfunction
14 % DEGENERATION OF THE SOLUTION
15 function degeneration=degeneration(T)
16 degeneration=0;
17 m = columns(T);
18 n = rows(T);
19 for i=1:m
20 for k=1:n
21 if T(k,i)>0
22 degeneration=degeneration+1;
23 endif
24 endfor
25 endfunction
26 pt=input('Go to next step 0 (NO), 1 (YES)')
27 if pt==1
28 % NUMBER OF SUPPLIERS AND RECIPIENTS
29 m=input('Input the number of suppliers, m = ');
30 while m<=0 printf('number of suppliers must be > 0\n');
31 m=input('Input again the number of suppliers, m= ');
32 endwhile

```

```

33 n=input('Input the number of recipients , n = ');
34 while n<=0 printf('number of recipients must be > 0\n');
35 n=input('Input again the number of recipients , n = ');
36 endwhile
37 for k=1:n
38 for i=1:m
39 T(k,i)=-1;
40 endfor
41 endfor
42 % TRANSPORTATION MATRIX C BETWEEN SUPPLIERS AND RECIPIENTS
43 printf('Input the transportation matrix (c) between %g suppliers and %g recipients\n',m,n')
44 for k=1:n
45 for i=1:m
46 printf('Input transportation cost from supplier P%g to recipient S%g, c(%g,%g) = ',i,k,k,i)
47 c(k,i)=input('');
48 while c(k,i)<=0
49 printf('Transportation cost must be > 0, c(%g,%g)= ', k,i)
50 c(k,i)=input('');
51 endwhile
52 endfor
53 endfor
54 % SUPPLY AND DEMAND
55 for i=1:m printf('Input supply of P%g supplier , (%g) = ',i,i')
56 supply(1,i)=input('');
57 while supply(1,i)<=0 printf('Supply must be > 0, supply(%g) = ',i')
58 supply(1,i)=input('');
59 endwhile
60 endfor
61 for k=1:n printf('Input demand of S%g recipient , (%g) = ',k,k')
62 demand(k,1)=input('');
63 while demand(k,1)<=0 printf('Demand must be > 0, demand(%g) = ',k')
64 demand(k,1)=input('');
65 endwhile
66 endfor
67 % CHECKING IF TOTAL DEMAND IS EQUAL TO AGGREGATED SUPPLY
68 while or(sum(demand) < sum(supply), sum(demand)>sum(supply))
69 printf('Total demand must be equal to aggregated supply\n')
70 tn=input('Would you like to change supply? 0 (YES) or 1 (NO) ')
71 if tn==0
72 for i=1:m printf('Input supply of P%g supplier , supply(%g) = ',i,i')
73 supply(1,i)=input('');
74 while supply(1,i)<=0 printf('Supply must be > 0, supply(%g) = ',i')
75 supply(1,i)=input('');
76 endwhile
77 endfor
78 else
79 if tn==1
80 for k=1:n printf('Input demand of S%g recipient , demand(%g) = ',k,k')
81 demand(k,1)=input('');
82 while demand(k,1)<=0 printf('Demand must be > 0, demand(%g) = ',k')
83 demand(k,1)=input('');
84 endwhile
85 endfor else
86 tn=input('Would you like to change supply? 0 (YES) or 1 (NO) ')
87 endif
88 endif
89 endwhile
90 endif
91 % TRANSPORTATION COSTS MATRIX
92 printf('\n')
93 for i=1:m
94 if i<=m printf('| %g\t',supply(1,i))
95 else
96 printf('|')
97 endif
98 endfor
99 printf('\n')
100 for i=1:m
101 if i<=m printf('| P%g\t',i)

```

```

102 else
103 printf('l')
104 endif
105 endfor
106 printf('\n')
107 for k=1:n printf('')
108 for i=1:m printf('l %g\t',c(k,i))
109 endfor
110 printf('l S%g l %g\t\n',k,demand(k,1))
111 endfor
112 printf('\n')
113
114 TNW = T;
115 printf('Table\n ')
116 for i=1:m
117 if i<=m
118 printf('l %g\t',supply(1,i))
119 else
120 printf(' ')
121 endif
122 endfor
123 printf('\n\n')
124 for k=1:n
125 printf(' ')
126 for i=1:m
127 if TNW(k,i)<0
128 printf('l x\t',TNW(k,i))
129 else
130 printf('l %g\t',TNW(k,i))
131 endif
132 endfor
133 printf('l %g\t\n',demand(k,1))
134 endfor
135 printf('\n')
136 printf('THE NORTHWEST CORNER METHOD \n')
137 supplyNW = supply; demandNW=demand;
138 stepNW = 1; i=1;k=1;l=0; w=1;
139 input(' ');
140 while i<=m
141 while k<=n
142 printf('step %g\n',stepNW)
143 TNW(k,i)=min(supplyNW(i),demandNW(k));
144 supplyNW(i)=supplyNW(i)-TNW(k,i);
145 demandNW(k)=demandNW(k)-TNW(k,i);
146 stepNW = stepNW+1;
147 if and(demandNW(k)==0,k<=n)
148 for j=i+1:m
149 if TNW(k,j)==-1
150 TNW(k,j)=0;
151 endif
152 endfor
153 endif
154 k=k+1;
155 if and(supplyNW(i)==0,i<=m)
156 w=k;
157 k=n+1;
158 else
159 printf(' ')
160 for o=1:n
161 if o<=m
162 printf('l %g\t',supplyNW(1,o))
163 else
164 printf(' ')
165 endif
166 endfor
167 printf('\n\n')
168 for o=1:n
169 printf(' ')
170 for u=1:m

```

```

171 if TNW(o,u)<0
172 printf(' | x\t',TNW(o,u))
173 else
174 printf(' | %g\t',TNW(o,u))
175 endif
176 endfor
177 printf(' | %g\t\n',demandNW(o,1))
178 endfor
179 printf('\n')
180 input(' ');
181 endif
182 endwhile
183 for j=w:n
184 if TNW(j,i)==-1
185 TNW(j,i)=0;
186 endif
187 endfor
188 printf(' ')
189 for o=1:m
190 if o<=m
191 printf(' | %g\t',supplyNW(1,o))
192 else
193 printf(' ')
194 endif
195 endfor
196 printf('\n\n')
197 for o=1:n
198 printf(' ')
199 for u=1:m
200 if TNW(o,u)<0
201 printf(' | x\t',TNW(o,u))
202 else
203 printf(' | %g\t',TNW(o,u))
204 endif
205 endfor
206 printf(' | %g\t\n',demandNW(o,1))
207 endfor
208 printf('\n')
209 if min(min(TNW))
210 input(' ');
211 endif
212 i=i+1;
213 l=1;
214 for k=1:n
215 if demandNW(k)==0
216 l=l+1;
217 end
218 endfor
219 k=l;
220 endwhile
221 % RESULTS
222 costNW = cost(TNW,c);
223 printf('Total transportation costs for the northwest corner method amount to %g\n',costNW)
224 printf('The number of basic variables - %g \n',degeneration(TNW))
225 if degeneration(TNW)==n+m-1
226 printf('Solution obtained by the northwest corner method is degenerated\n')
227 degenerationTNW = 'YES';
228 else
229 printf('Solution obtained by the northwest corner method is non-degenerated, %g<%g\n',degeneration
(TNW),n+m-1)
230 degenerationTNW = 'NO';
231 endif
232 printf('\n')

```

Appendix B

```

1 % Attention: copy lines from 1 to 112 from the Appendix A
2   TMKW = T;
3   printf('Table\n ')
4   for i=1:m
5     if i<=m
6       printf(' | %g\t',supply(1,i))
7     else
8       printf(' ')
9     endif
10  endfor
11  printf('\n\n')
12  for k=1:n
13    printf(' ')
14    for i=1:m
15      if TMKW(k,i)<0
16        printf(' | x\t',TMKW(k,i))
17      else
18        printf(' | %g\t',TMKW(k,i))
19      endif
20    endfor
21    printf(' |      %g\t\n',demand(k,1))
22  endfor
23  printf('\n')
24  printf('THE ROW MINIMUM METHOD\n')
25  dMKW = c; TMKW = T; supplyMKW = supply; demandMKW = demand;
26  cmin=0; cmax=0; imin=0; kmin=0; stepMKW=1;
27  cmax=max(max(dMKW));
28  input(' ');
29  while min(min(TMKW))<0
30    printf('step %g\n',stepMKW)
31    stepMKW = stepMKW + 1;
32    krows=1;
33    while krows<=n
34      if min(TMKW(krows,:))<0
35        k = krows;
36        krows=n;
37      endif
38      krows=krows+1;
39    endwhile
40    i=1;
41    cmin=min(dMKW(k,:));
42    while or(k <= n,k==1)
43      while or(i <= m,i==1)
44        if i<=m
45          if dMKW(k,i) == cmin
46            imin = i;
47            kmin = k;
48            i=i+1;
49            k=k+1;
50          else
51            i=i+1;
52          endif
53        endif
54      endwhile
55      if k<=n
56        k=k+1;
57        i=1;
58      endif
59    endwhile
60    cMKWmin(kmin,imin)=cmin;
61    TMKW(kmin,imin)=min(supplyMKW(1,imin),demandMKW(kmin,1));
62    supplyMKW(imin)=supplyMKW(imin)-TMKW(kmin,imin);
63    demandMKW(kmin)=demandMKW(kmin)-TMKW(kmin,imin);
64    if demandMKW(kmin)==0
65      for i=1:m
66        if TMKW(kmin,i)==-1
67          TMKW(kmin,i)=0;

```



```

68     endif
69     dMKW(kmin,i)=cmax+1;
70     endfor
71     endif
72     if supplyMKW(imin)==0
73     for k=1:n
74     if TMKW(k,imin)==-1
75     TMKW(k,imin)=0;
76     endif
77     dMKW(k,imin)=cmax+1;
78     endfor
79     endif
80     printf(' ')
81     for o=1:m
82     if o<=m
83     printf(' | %g\t',supplyMKW(1,o))
84     else
85     printf(' ')
86     endif
87     endfor
88     printf('\n\n')
89     for o=1:n
90     printf(' ')
91     for u=1:m
92     if TMKW(o,u)<0
93     printf(' | x\t',TMKW(o,u))
94     else
95     printf(' | %g\t',TMKW(o,u))
96     endif
97     endfor
98     printf(' | %g\t\n',demandMKW(o,1))
99     endfor
100    printf('\n')
101    if min(min(TMKW))
102    input(' ');
103    endif
104    endwhile
105    % RESULTS
106    costMKW = cost(TMKW,c);
107    printf('Total transportation cost for the row minimum method amount to %g\n',costMKW)
108    printf('The number of basic variables - %g \n',degeneration(TMKW))
109    if degeneration(TMKW)==n+m-1
110    printf('Solution obtained by the row minimum method is degenerated \n')
111    degenerationTMKW = 'YES';
112    else
113    printf('Solution obtained by the row minimum method is non-degenerated, %g<%g\n',degeneration(TMKW),
114          n+m-1)
115    degenerationTMKW = 'NO';
116    endif
117    printf('\n')

```

Appendix C

```

1  % Attention: copy lines from 1 to 112 from the Appendix A
2  TMK = T;
3  printf('Table\n ')
4  for i=1:m
5  if i<=m
6  printf(' | %g\t',supply(1,i))
7  else
8  printf(' ')
9  endif
10 endfor
11 printf('\n\n')
12 for k=1:n
13 printf(' ')
14 for i=1:m
15 if TMK(k,i)<0

```

```

16     printf(' | x\t',TMK(k,i))
17     else
18     printf(' | %g\t',TMK(k,i))
19     endif
20     endfor
21     printf(' |      %g\t\n',demand(k,1))
22     endfor
23     printf('\n')
24     printf('THE LEAST COST IN MATRIX\n')
25     cMK = c; TMK = T; supplyMK = supply; demandMK = demand;
26     cmin=0; cmax=0; imin=0; kmin=0; stepMK=1;
27     cmax=max(max(cMK));
28     input(' ');
29     while min(min(TMK))<0
30     printf('step %g\n',stepMK)
31     stepMK = stepMK + 1;
32     cmin=min(min(cMK));
33     k=1;
34     i=1;
35     while or(k <= n,k==1)
36     while or(i <= m,i==1)
37     if i<=m
38     if cMK(k,i) == cmin
39     imin = i;
40     kmin = k;
41     i=m+1;
42     k=n+1;
43     else
44     i=i+1;
45     endif
46     endif
47     endwhile
48     if k<=n
49     k=k+1;
50     i=1;
51     endif
52     endwhile
53     cMKmin(kmin,imin)=cmin;
54     TMK(kmin,imin)=min(supplyMK(1,imin),demandMK(kmin,1));
55     supplyMK(imin)=supplyMK(imin)-TMK(kmin,imin);
56     demandMK(kmin)=demandMK(kmin)-TMK(kmin,imin);
57     if demandMK(kmin)==0
58     for i=1:m
59     if TMK(kmin,i)==-1
60     TMK(kmin,i)=0;
61     endif
62     cMK(kmin,i)=cmax+1;
63     endfor
64     endif
65     if supplyMK(imin)==0
66     for k=1:n
67     if TMK(k,imin)==-1
68     TMK(k,imin)=0;
69     endif
70     cMK(k,imin)=cmax+1;
71     endfor
72     endif
73     printf(' ')
74     for o=1:m
75     if o<=m
76     printf(' | %g\t',supplyMK(1,o))
77     else
78     printf(' ')
79     endif
80     endfor
81     printf('\n\n')
82     for o=1:n
83     printf(' ')
84     for u=1:m

```

```

85     if TMK(o,u)<0
86     printf(' | x\t',TMK(o,u))
87     else
88     printf(' | %g\t',TMK(o,u))
89     endif
90     endfor
91     printf(' |   %g\t\n',demandMK(o,1))
92     endfor
93     printf('\n')
94     if min(min(TMK))
95     input(' ');
96     endif
97     endwhile
98     % RESULTS
99     costMK = cost(TMK,c);
100    printf('Total transportation cost for the least cost in matrix amount to %g\n',costMK)
101    printf('The number of basic variables - %g \n',degeneration(TMK))
102    if degeneration(TMK)==n+m-1
103    printf('Solution obtained by the least cost in matrix is degenerated \n')
104    degenerationTMK = 'YES';
105    else
106    printf('Solution obtained by the least cost in matrix is non-degenerated, %g<%g\n',degeneration(TMK),
107           n+m-1)
108    degenerationTMK = 'NO';
109    endif
110    printf('\n')

```

Appendix D

```

1     % Attention: copy lines from 1 to 112 from the Appendix A
2     TVAM = T;
3     printf('Table\n ')
4     for i=1:m
5     if i<=m
6     printf(' | %g\t',supply(1,i))
7     else
8     printf(' ')
9     endif
10    endfor
11    printf('\n\n')
12    for k=1:n
13    printf(' ')
14    for i=1:m
15    if TVAM(k,i)<0
16    printf(' | x\t',TVAM(k,i))
17    else
18    printf(' | %g\t',TVAM(k,i))
19    endif
20    endfor
21    printf(' |   %g\t\n',demand(k,1))
22    endfor
23    printf('\n')
24    printf('VOGEL"S APPROXIMATION METHOD\n')
25    cVAM = c; TVAM = T; supplyVAM = supply; demandVAM = demand;
26    cmin=0; cmax=0; imin=0; kmin=0; stepVAM=1;
27    cmax=max(max(cVAM));
28    input(' ');
29    while min(min(TVAM))<0
30    printf('step %g\n',stepVAM)
31    stepVAM = stepVAM + 1;
32    for i=1:m
33    cVAMsort = sort(cVAM(:,i));
34    cVAMc(1,i) = cVAMsort(2)-cVAMsort(1);
35    cVAMcmin(1,i)=cVAMsort(1);
36    endfor
37    for k=1:n
38    cVAMsort = sort(cVAM(k,:));
39    cVAMr(k,1) = cVAMsort(2)-cVAMsort(1);

```

```

40  cVAMrmin(k,1)=cVAMsort(1);
41  endfor
42  cVAMmax=max(max(cVAMc),max(cVAMr));
43  for i=1:m
44  if cVAMc(1,i)==cVAMmax
45  else
46  cVAMcmin(1,i)=cmax+1;
47  endif
48  endfor
49  for k=1:n
50  if cVAMr(k,1)==cVAMmax
51  else
52  cVAMrmin(k,1)=cmax+1;
53  endif
54  endfor
55  cVAMmin = min(min(cVAMcmin),min(cVAMrmin));
56  kmin = 0; k=1; i=1; imin=0;
57  while i<=m
58  if cVAMcmin(1,i) == cVAMmin
59  imin = i; i=m+1;
60  endif
61  i=i+1;
62  endwhile
63  if imin == 0
64  while k<=n
65  if cVAMrmin(k,1)==cVAMmin
66  kmin = k; k=n+1;
67  endif
68  k=k+1;
69  endwhile
70  endif
71  i=1;k=1;
72  if kmin >0
73  while i<=m
74  if cVAM(kmin,i)==cVAMmin
75  imin = i; i=m+1;
76  endif
77  i=i+1;
78  endwhile
79  else
80  if imin>0
81  while k<=n
82  if cVAM(k,imin)==cVAMmin
83  kmin = k; k=n+1;
84  endif
85  k=k+1;
86  endwhile
87  endif
88  endif
89  TVAM(kmin,imin)=min(supplyVAM(1,imin),demandVAM(kmin,1));
90  supplyVAM(imin)=supplyVAM(imin)-TVAM(kmin,imin);
91  demandVAM(kmin)=demandVAM(kmin)-TVAM(kmin,imin);
92  if supplyVAM(imin)==0
93  for k=1:n
94  if TVAM(k,imin)==-1
95  TVAM(k,imin) = 0;
96  endif
97  cVAM(k,imin)=cmax*2;
98  endfor
99  endif
100  if demandVAM(kmin)==0
101  for i=1:m
102  if TVAM(kmin,i)==-1
103  TVAM(kmin,i) = 0;
104  endif
105  cVAM(kmin,i)=cmax*2;
106  endfor
107  endif
108  printf(' ')

```

```

109 for o=1:m
110 if o<=m
111 printf(' | %g\t',supplyVAM(1,o))
112 else
113 printf(' ')
114 endif
115 endfor
116 printf('\n\n')
117 for o=1:n
118 printf(' ')
119 for u=1:m
120 if TVAM(o,u)<0
121 printf(' | x\t',TVAM(o,u))
122 else
123 printf(' | %g\t',TVAM(o,u))
124 endif
125 endfor
126 printf(' | %g\t\n',demandVAM(o,1))
127 endfor
128 printf('\n')
129 if min(min(TVAM))
130 input(' ');
131 endif
132 endwhile
133 % RESULTS
134 costVAM = cost(TVAM,c);
135 printf('Total transportation cost for the VAM method amount to %g\n',costVAM)
136 printf('The number of basic variables - %g \n',degeneration(TVAM))
137 if degeneration(TVAM)==n+m-1
138 printf('Solution obtained by the VAM method is degenerated \n')
139 degenerationTVAM = 'YES';
140 else
141 printf('Solution obtained by the VAM method is non-degenerated, %g<%g\n',degeneration(TVAM),n+m-1)
142 degenerationTVAM = 'NO';
143 endif
144 printf('\n')
145 input(' ');
146 printf('\n\n COMPARISON OF THE RESULTS OBTAINED BY VARIOUS METHODS\n')
147 step = [stepNW,stepMK,stepMKW,stepVAM];
148 step = min(step);
149 cost = [costNW,costMK,costMKW,costVAM];
150 cost = min(cost);
151 printf('\n THE OPTIMAL SOLUTION WAS OBTAINED BY MEIHOD:\n')
152 if costNW == cost printf('THE NORTHWEST CORNER MEIHOD,\n') endif
153 if costMK == cost printf('THE LEAST COST IN MATRIX,\n') endif
154 if costMKW == cost printf('THE ROW MINIMUM MEIHOD,\n') endif
155 if costVAM == cost printf('VAM,\n') endif
156 printf('\n FINAL COMPARISON OF METHODS\n')
157 printf('\nMethod \t\t INW\t IMK\t IMKW\t IVAM\t\n')
158 printf('The number of iterations\t\t %g\t %g\t %g\t %g\t\n',stepNW,stepMK,stepMKW,stepVAM)
159 printf('Total transportation cost\t\t %g\t %g\t %g\t %g\t\n',costNW,costMK,costMKW,costVAM)
160 printf('Solution is degenerated \t\t %s\t %s\t %s\t %s\t\n',degenerationTNW,degenerationTMK,
degenerationTMKW,degenerationTVAM)
161 printf('\n Abbreviation - Explanation \n')
162 printf('\nNW - THE NORTHWEST CORNER MEIHOD\n')
163 printf('MK - THE LEAST COST IN MATRIX METHOD\n')
164 printf('MKW - THE ROW MINIMUM MEIHOD\n')
165 printf('VAM - THE VOGEL"S APPROXIMATION MEIHOD\n\n')

```

References

1. Angelelli, E.; Morandi, V.; Savelsbergh, M.; Speranza, M.G. System optimal routing of traffic flows with user constraints using linear programming. *Eur. J. Oper. Res.* **2021**, *293*, 863–879. [[CrossRef](#)]
2. Barnhart, C.; Krishnan, N.; Kim, D.; Ware, K. Network design for express shipment delivery. *Comput. Optim. Appl.* **2002**, *21*, 239–262. [[CrossRef](#)]
3. Serrano-Hernandez, A.; Faulin, J.; Hirsch, P.; Fikar, C. Agent-based simulation for horizontal cooperation in logistics and transportation: From the individual to the grand coalition. *Simul. Model. Pract. Theory* **2018**, *85*, 47–59. [[CrossRef](#)]

4. Mancini, S.; Gansterer, M. Vehicle routing with private and shared delivery locations. *Comput. Oper. Res.* **2021**, *133*, 105361. [[CrossRef](#)]
5. Tamannaie, M.; Rasti-Barzoki, M. Mathematical programming and solution approaches for minimizing tardiness and transportation costs in the supply chain scheduling problem. *Comput. Ind. Eng.* **2019**, *127*, 643–656. [[CrossRef](#)]
6. Salehi, M.; Jalalian, M.; Vali Siar, M. Green transportation scheduling with speed control: Trade-off between total transportation cost and carbon emission. *Comput. Ind. Eng.* **2017**, *113*, 392–404. [[CrossRef](#)]
7. Żurek, J.; Małachowski, J.; Ziółkowski, J.; Szkutnik-Rogoż, J. Reliability analysis of technical means of transport. *App. Sci.* **2020**, *10*, 3016. [[CrossRef](#)]
8. Sagratella, S.; Schmidt, M.; Sudermann-Merx, N. The noncooperative fixed charge transportation problem. *Eur. J. Oper. Res.* **2020**, *284*, 373–382. [[CrossRef](#)]
9. Tang, C.H. Optimization for transportation outsourcing problems. *Comput. Ind. Eng.* **2020**, *139*, 106213. [[CrossRef](#)]
10. Fricker, J.; Whitford, R. Fundamentals of transportation engineering. In *A Multimodal Systems Approach*; Pearson Education, Inc.: Upper Saddle River, NY, USA, 2004.
11. Ozkok, B.A. An iterative algorithm to solve a linear fractional programming problem. *Comput. Ind. Eng.* **2020**, *140*, 106234. [[CrossRef](#)]
12. Venkatachalapathy, M.; Pandiarajan, R.; Ganeshkumar, S. A special type of solving transportation problems using generalized quadratic fuzzy number. *Int. J. Sci. Technol. Res.* **2020**, *9*, 6344–6348.
13. Kuiteing, A.K.; Marcotte, P.; Savard, G. Pricing and revenue maximization over a multicommodity transportation network: The nonlinear demand case. *Comput. Optim. Appl.* **2018**, *71*, 641–671. [[CrossRef](#)]
14. Cosma, O.; Pop, P.C.; Dănciulescu, D. A novel matheuristic approach for a two-stage transportation problem with fixed costs associated to the routes. *Comput. Oper. Res.* **2020**, *118*, 104906. [[CrossRef](#)]
15. Bamigboye, O.; Olufunke, O.; Agarana, M.; Olabode, O. Optimizing the movement of people and goods in a local community using transportation model. In Proceedings of the 2nd International Conference on Engineering for Sustainable World, Ota, Nigeria, 9–13 July 2018; Volume 413, p. 012020. [[CrossRef](#)]
16. Selech, J.; Andrzejczak, K. An aggregate criterion for selecting a distribution for times to failure of components of rail vehicles. *Maint. Rel.* **2020**, *22*, 102–111. [[CrossRef](#)]
17. Levinson, H. The reliability of transit service: An historical perspective. *J. Urban Technol.* **2005**, *12*, 99–118. [[CrossRef](#)]
18. Adlakha, V.; Kowalski, K. Alternate solutions analysis for transportation problems. *J. Bus. Econ. Res.* **2011**, *7*, 41–49. [[CrossRef](#)]
19. Andrzejczak, K.; Młyńczak, M.; Selech, J. Poisson-distributed failures in the predicting of the cost of corrective maintenance. *Maint. Rel.* **2018**, *20*, 602–609. [[CrossRef](#)]
20. Żurek, J.; Ziółkowski, J.; Szkutnik-Rogoż, J. Stochastic dominance application for optimal transport company selection. In Proceedings of the 15th Conference on Computational Technologies in Engineering, TKI 2018, Jora Wielka, Poland, 16–19 October 2018; p. 020074. [[CrossRef](#)]
21. Ziółkowski, J.; Oszczypała, M.; Małachowski, J.; Szkutnik-Rogoż, J. Use of artificial neural networks to predict fuel consumption on the basis of technical parameters of vehicles. *Energies* **2021**, *14*, 2639. [[CrossRef](#)]
22. Azucena, J.; Alkhaleel, B.; Liao, H.; Nachtmann, H. Hybrid simulation to support interdependence modeling of a multimodal transportation network. *Simul. Model. Pract. Theory* **2021**, *107*, 102237. [[CrossRef](#)]
23. Hitchcock, F. The distribution of a product from several sources to numerous localities. *J. Math. Phys.* **1941**, *20*, 224–230. [[CrossRef](#)]
24. Dantzig, G. *Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, Activity Analysis of Production and Allocation*; Koopmans, T.C., Ed.; John Wiley & Sons: New York, NY, USA, 1951.
25. Charnes, A.; Cooper, W.; Henderson, A. *An Introduction to Linear Programming*; John Wiley & Sons: New York, NY, USA, 1953.
26. Mhlanga, A.; Nduna, I.S.; Matarise, D.F.; Machisvo, A. Innovative application of Dantzig’s North–West Corner Rule to solve a transportation problem. *Int. J. Educ. Res.* **2014**, *2*, 1–12.
27. Loch, G.V.; da Silva, A.C.L. A computational study on the number of iterations to solve the transportation problem. *Appl. Math. Sci.* **2014**, *8*, 4579–4583. [[CrossRef](#)]
28. Can, T.; Koçak, H. Tuncay Can’s Approximation Method to obtain initial basic feasible solution to transport problem. *Appl. Comput. Math.* **2016**, *5*, 78–82. [[CrossRef](#)]
29. Karagul, K.; Sahin, Y. A novel approximation method to obtain initial basic feasible solution of transportation problem. *J. King Saud Univ. Eng. Sci.* **2020**, *32*, 211–218. [[CrossRef](#)]
30. De França Aguiar, G.; De Cássia Xavier Cassins Aguiar, B.; Wilhelm, V. New methodology to find initial solution for transportation problems: A case study with fuzzy parameters. *Appl. Math. Sci.* **2015**, *9*, 915–927. [[CrossRef](#)]
31. Korukoğlu, S.; Ballı, S. An improved Vogel’s approximation method for the transportation problem. *Math. Comput. Appl.* **2011**, *16*, 370–381. [[CrossRef](#)]
32. Das, U.K.; Babu, A.; Khan, A.R.; Helal, A.; Uddin, D.S. Logical development of Vogel’s approximation method (LD-VAM): An approach to find basic feasible solution of transportation problem. *Int. J. Sci. Technol. Res.* **2014**, *3*, 42–48.
33. Ahmed, M.M.; Khan, A.R.; Uddin, M.S.; Ahmed, F. A new approach to solve transportation problems. *Open J. Optim.* **2016**, *5*, 22–30. [[CrossRef](#)]
34. Kirca, O.; Şatir, A. A heuristic for obtaining an initial solution for the transportation problem. *J. Oper. Res. Soc.* **1990**, *41*, 865–871. [[CrossRef](#)]

35. Mathirajan, M.; Meenakshi, B. Experimental analysis of some variants of Vogel's approximation method. *Asia-Pac. J. Oper. Res.* **2004**, *21*, 447–462. [CrossRef]
36. Juman, Z.; Hoque, M. An efficient heuristic to obtain a better initial feasible solution to the transportation problem. *Appl. Soft Comput.* **2015**, *34*, 813–826. [CrossRef]
37. Imam, T.; Elsharawy, G.; Gomah, M.; Samy, I. Solving transportation problem using object-oriented model. *Int. J. Comput. Sci. Netw. Secur.* **2009**, *9*, 353–361.
38. Pallavi, P.L.; Lakshmi, R.A. A Mat Lab oriented approach to solve the transportation problem. *Int. J. Adv. Res. Found.* **2015**, *50*, 6000.
39. Appati, J.K.; Gogovi, G.K.; Fosu, G.O. MATLAB implementation of Vogel's approximation and the modified distribution methods. *Int. J. Adv. Comput. Technol.* **2015**, *4*, 1449–1453.
40. Ghadle Kirtiwant, P.; Muley Yogesh, M. New approach to solve assignment problem using MATLAB. *Int. J. Latest Technol. Eng. Manag. Appl. Sci.* **2015**, *4*, 36–39.
41. Sengamalaselvi, D.J. Solving transportation problem by using MATLAB. *Int. J. Eng. Sci. Res. Technol.* **2017**, *6*, 374–381. [CrossRef]
42. Chung, K.J. The integrated inventory model with the transportation cost and two-level trade credit in supply chain management. *Comput. Math. Appl.* **2012**, *64*, 2011–2033. [CrossRef]
43. Juman, Z.; Hoque, M. A heuristic solution technique to attain the minimal total cost bounds of transporting a homogeneous product with varying demands and supplies. *Eur. J. Oper. Res.* **2014**, *239*, 146–156. [CrossRef]
44. Mandal, J.; Goswami, A.; Wang, J.; Tiwari, M. Optimization of vehicle speed for batches to minimize supply chain cost under uncertain demand. *Inf. Sci.* **2020**, *515*, 26–43. [CrossRef]
45. Pielecha, J.; Skobieć, K.; Kurtyka, K. Exhaust emissions and energy consumption analysis of conventional, hybrid, and electric vehicles in real driving cycles. *Energies* **2020**, *13*, 6423. [CrossRef]
46. Berling, P.; Martínez-De-Albéniz, V. Dynamic speed optimization in supply chains with stochastic demand. *Transp. Sci.* **2016**, *50*, 1114–1127. [CrossRef]
47. Galińska, B. Multiple criteria evaluation of global transportation system—Analysis of case study. In Proceedings of the 14th Scientific and Technical Conference on Transport Systems Theory and Practice, TSTP 2017, Katowice, Poland, 18–20 September 2017; pp. 155–171.
48. Entrialgo, J.; García, M.; Díaz, J.; García, J.; García, D.F. Modelling and simulation for cost optimization and performance analysis of transactional applications in hybrid clouds. *Simulat. Model. Pract. Theory* **2021**, *109*, 102311. [CrossRef]
49. Das, A.; Deepmala, J.R. Some aspects on solving transportation problem. *Yugosl. J. Oper. Res.* **2020**, *30*, 45–57. [CrossRef]
50. Kramer, R.; Maculan, N.; Subramanian, A.; Vidal, T. A speed and departure time optimization algorithm for the pollution-routing problem. *Eur. J. Oper. Res.* **2015**, *247*, 782–787. [CrossRef]
51. Wang, M.H.; Kuo, Y.E. A perturbation method for solving linear semi-infinite programming problems. *Comput. Math. Appl.* **1999**, *37*, 181–198. [CrossRef]
52. Cyplik, P.; Glowacka-Fertsch, D.; Fertsch, M. *Logistics of Distribution Companies*; ILiM: Poznań, Poland, 2008.
53. Cieśla, M.; Sobota, A.; Jacyna, M. Multi-Criteria decision making process in metropolitan transport means selection based on the sharing mobility idea. *Sustainability* **2020**, *12*, 7231. [CrossRef]
54. Bozarth, C.; Handfield, R. *Introduction to Operations and Supply Chain Management*, 5th ed.; Pearson Education: Upper Saddle River, NJ, USA, 2019.
55. Gehlot, H.; Honnappa, H.; Ukkusuri, S. An optimal control approach to day-to-day congestion pricing for stochastic transportation networks. *Comput. Oper. Res.* **2020**, *119*, 104929. [CrossRef]
56. Available online: <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:52021PC0556&from=EN> (accessed on 8 September 2021).
57. Available online: <https://www.consilium.europa.eu/pl/press/press-releases/2019/06/13/cutting-emissions-council-adopts-co2-standards-for-trucks/> (accessed on 8 September 2021).
58. Available online: https://ec.europa.eu/clima/policies/transport/vehicles/vecto_en (accessed on 12 August 2021).



Contents lists available at ScienceDirect

Computers & Industrial Engineering

journal homepage: www.elsevier.com/locate/caie

An innovative computational algorithm for modelling technical readiness coefficient: A case study in automotive industry

Joanna Szkutnik-Rogoż, Jerzy Małachowski*, Jarosław Ziołkowski

Institute of Mechanics and Computational Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, Military University of Technology, gen. Sylwestra Kaliskiego 2, 00-908 Warsaw, Poland

ARTICLE INFO

Keywords:

Reliability
Dependability
Renewal process
Mathematical modelling

ABSTRACT

Modelling technical availability is particularly important in systems characterised by randomness in the occurrence of tasks. The aim of the article was to develop an innovative solution using the Laplace transform and the R programming language in the form of an algorithm designed to determine a reliability measure, the technical readiness coefficient. First, the literature on the most important theorems and definitions concerning the theory of reliability was reviewed to develop assumptions and a mathematical model of the actual process of using means of transport. The subject of the research, along with the availability of actual numerical data used for calculations and analyses were presented. An algorithm based on the Laplace transform was proposed to evaluate the reliability of the system. Furthermore, the sensitivity analysis of the model was performed and the results were discussed to identify final conclusions and directions for future research. The results show that the exploitation process of the vehicle fleet studied was correctly organised and that the proposed algorithm eliminates the need to perform complex calculations using traditional methods and enables the visualisation of the achieved results. Additionally, the algorithm is universal and can be used to determine both the functional and numerical reliability characteristics of any technical object. Moreover, this solution is free of charge, and its implementation requires only the installation of the RStudio editor (version 1.4.1106).

1. Introduction

The literature frequently deals with topics related to modelling systems for the operation of means of transport. The use of appropriate mathematical methods to control the exploitation process enables not only rational decision-making but also the correct implementation of the assigned tasks. One of the measures describing the functioning of the means of transport exploitation system is its readiness to perform specific transport tasks. Methods of modelling the exploitation processes of technical objects are of interest in theory of reliability, operational research, decision-making theory, simulation modelling, renewal theory and methods of statistical analysis, among other fields.

The theory of reliability and the renewal theory are often used to solve problems related not only to the process of usage, but also to the maintenance of the suitability of technical objects (Ziołkowski, Małachowski, Oszczypala, Szkutnik-Rogoż, & Legas, 2021). The practical application of the theory of reliability was considered in Bougofa et al. (2021). The analytical expression of the reliability function of the warm standby system based on virtual age theory was proposed in Bai et al. (2022). An iterative method to compute optimal reliability schemes was proposed in the article (Fernandez, 2022). Problems

and challenges in systems reliability were presented in Zio (2009). In the article (Peng, Snyder, Lim, & Liu, 2011), a strategic supply chain management problem was considered to design reliable networks using a hybrid metaheuristic algorithm. In Yeu-Shiang, Jyh-Wen, and Wei-Yu (2022), a two-echelon supply chain where the downstream retailer shares information with the upstream manufacturer was explored. The results show that when the availability and reliability of the information transmission mechanism are both high, the manufacturer would gain more profit. The application of an innovative method of a preventive maintenance strategy applied to a single-unit system subject to random failures was described in Samet, Chelbi, and Hmida (2009). The imperfection of repair actions was modelled by a decreasing quasi-renewal process based on a deterministic repair efficiency factor. A discrete numerical algorithm to assess the instantaneous availability of each repairable connection elements was proposed in Xing and Levitin (2018). Connection elements characterised by location-dependent connection range, time-to-failure and time-to-repair distributions were allocated to different nodes to provide system connectivity. In the paper (Nguyen, Dijoux, & Fouladirad, 2017), the repairable systems under imperfect repairs were considered. The results obtained were

* Corresponding author.

E-mail address: jerzy.malachowski@wat.edu.pl (J. Małachowski).

<https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108942>

Received 31 March 2022; Received in revised form 10 November 2022; Accepted 23 December 2022

Available online 26 December 2022

0360-8352/© 2022 The Author(s). Published by Elsevier Ltd. This is an open access article under the CC BY-NC-ND license (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

used to propose static, dynamic and failure limit maintenance policies. The joint model of condition-based maintenance and spares inventory for system with two failure modes was developed in [Jing, Xian, Yanbo, and Qingan \(2022\)](#). Reliability analysis of balanced systems has become a significant topic in reliability research in recent years. The mathematical model and the results presented in [Fang and Cui \(2021\)](#) can be used in, for example, reliability, supply chain management, and transportation planning. The model of pharmaceutical supply chain reliability and the relationships between key aspects of supply chain design, such as configuration, disruptions, and recovery were studied in [Tucker and Daskin \(2022\)](#). In [Hua and Elsayed \(2016\)](#), two scenarios were considered for reliability estimation of different types of k-out-of-n Pairs:G Balanced systems. In the article ([Cui, Chen, & Li, 2019](#)), two balanced reliability systems were introduced, and their reliability models were developed. The formulas for system reliability, probability density functions and moments of lifetimes were obtained. A new reliability model for systems that display two-phase degradation was proposed in [Yujia, Rui, and Ying \(2022\)](#). Applications of k-out-of-n systems can be seen in many real-world phenomena, including transportation, transmission and manufacturing ([Zhao, Wu, Wang, & Wang, 2018](#)). An algorithm for calculating the reliability function that can be used in more detailed studies of stationary and non-stationary reliability characteristics was proposed in [Rykov, Kozyrev, Filimonov, and Ivanova \(2020\)](#). Analyses of availability, reliability, mean time to failure and steady-state availability of the system were introduced in the paper ([Temraz, 2021](#)). In that study, the lifetime of the system's units was assumed to be exponentially distributed. In [Xie, Castagliola, Sun, Tang, and Hu \(2022\)](#), a one-sided adaptive control chart was proposed for monitoring time between events. Mean residual lifetime models and proportional hazard models are widely used for failure prediction and reliability analysis ([Reza & Amirhossein, 2022](#)). A new efficient approximation algorithm for evaluating the reliability of a traffic-path-based network model was proposed in [Hayashi and Abe \(2011\)](#). Numerical examples showed that the proposed algorithm ensured higher speed with fewer approximation errors and could be implemented for other reliability measures, such as failure frequency, mean time between failures and mean time to repair.

Of particular importance in reliability analysis is the Laplace transform. In [Cui, Chen, and Wu \(2017\)](#), two new interval availability indexes were introduced for Markov repairable computer systems, which were named as an availability with a given window length and containing a specified point or interval. The calculation formulas for these indexes were presented in matrix form by using the Laplace transform. In [Cui, Du, and Zhang \(2014\)](#), several availability measures such as interval availability, instantaneous availability, and steady-state availability were presented, including some derived by using the Laplace transform. Stochastic models describing multiple availability for a system with periods of operation and repair that form an alternating renewal process with exponential times to failure and repair and the integral equations derived via the Laplace transform were analysed in [Finkelstein and Zarudnij \(2002\)](#). The reliability of a system that consists of three subsystems linked in a series was described in [Elshoubary and Shaeer \(2021\)](#). The supplementary variable technique and Laplace transform were used, and availability, reliability, mean time to failure and profit function were determined as essential reliability measures. In the paper ([Rykov, Ivanova, & Kozyrev, 2021](#)), the embedded regeneration approach was used to perform a reliability-centred study of a k-out-of-n system and obtain its main reliability characteristics. The time-dependent system state probabilities were calculated in terms of their Laplace transform. The theory of alternating renewal processes using the Laplace transform to study a relaxation function was developed in [Miyaguchi, Uneyama, and Akimoto \(2019\)](#). The Laplace transform was used to find the explicit form of the reliability function and the Mean Time to Failure (MTTF) of the system in [Yang and Wu \(2021\)](#). The use of the Laplace transform technique to develop two system performance measures such as system reliability and mean time to

system failure was also considered in the article ([Yen, Wang, & Wu, 2020](#)).

It is often difficult or impossible to implement analytical methods to solve decision-making problems related to the evaluation of the operation of complex systems of various technical objects. Therefore, simulation techniques are increasingly used to solve these types of problems. To develop simulation models, the probability distributions of the random variables describing the system or process being studied must be determined based on exploitation data. The results of simulation tests are often used to make rational decisions regarding the control of the exploitation process ([Duran, Aguilar, Capaldo, & Arata, 2021](#)). An agent-based simulation model for military industrial logistics system was developed in [Li et al. \(2019\)](#). A novel simulation-based sensitivity analysis to evaluate the main causes of bus service unreliability was proposed in the article ([Moosavi, Yuen, Yap and Onn, 2020](#)). A simulation-based model for quantifying resilience in mass railway transportation systems by quantifying passenger delay and passenger load as indicators of system performance was proposed in [Adjetey-Bahun, Birregah, Châtelet, and Planchet \(2016\)](#). In the paper ([Lapatin & Nazarov, 2021](#)), a single server system with redial in which a stationary Poisson process was used as input was considered. This system can be used in the simulation and modelling of computer systems, in the design of data transmission networks, and in the analysis of complex multi-stage production processes. In the article ([Nazarov, Paul, & Gudkova, 2017](#)), the retrial queue with two-way communication and Poisson arrival process were reviewed, and the conditions for the applicability of the obtained approximation depending on the values of the system-defining parameters were defined.

Issues related to the modelling of readiness in transport systems were discussed in [Ahmed and Dey \(2020\)](#) and [Zurek, Zieja, and Ziolkowski \(2018\)](#). In the paper ([Hosseini & Pishvae, 2021](#)), an uncertainty theory-based mathematical model, stability analysis and reliability assessment of uncertain transportation networks were used. An algorithm based on minimal paths to evaluate the railway transportation system reliability was proposed in [Yeh, Lin, Yeng, and Huang \(2021\)](#). The system reliability in terms of the MCVs (minimal component vectors) using the derived capacity probability distribution was considered in [Chang \(2022\)](#). Recent studies of transportation network performance under perturbations were discussed in [Gu, Fu, Liu, Xu, and Chen \(2020\)](#). Numerical examples were used to assess three concepts related to network performance: reliability, vulnerability and resilience. An adaptive signal controller for managing traffic delays and urban bus service reliability with fully adaptable acyclic timing plans was presented in [Chow, Su, Liang, and Zhong \(2021\)](#). Ports are crucial elements of supply chains that serve as connections between maritime and land-based transportation modes, and thus increasing their reliability and resilience is essential, especially in times of disruption ([Asadabadi & Miller-Hooks, 2018](#)). In [Wan, Yang, Zhang, Yan, and Fan \(2018\)](#), the literature on transportation resilience was reviewed with an emphasis on definitions, characteristics and research methods applied in different transportation systems. The Extreme Value Theory (EVT) was used to model rare events that appear as delivery delays in road transport in [Faldzinski, Osinska, and Zalewski \(2021\)](#). Automatic Vehicle Location (AVL) data is widely used for real-time reliability monitoring of buses ([Barabino & Di Francesco, 2021](#)). A numerical analysis was conducted of a major bus operator from the Italian coastal city of Cagliari. The daily operational mileage for a selected group of means of transport and the moments of failures were recorded during the tests in the article ([Zurek, Malachowski, Ziolkowski and Szkutnik-Rogoz, 2020](#)). The results were used to identify reliability indicators and determine the expected fitness time of the available vehicle fleet. In [Liang, He, Zhang, and Ma \(2021\)](#), a precise and comprehensive mathematical model was proposed to describe the bus exploitation process.

Markov or semi-Markov models of the exploitation process have been used in several studies to assess the reliability of technical objects.

The mean time to failure and availability of semi-Markov missions consisting of phases with random sequence and duration were analysed in [Cekyay and Ozekici \(2010\)](#). Extended dissipative filtering for slow-sampling, singularly perturbed systems based on the double-layer switching mechanism containing the Markov jump signal and the persistent dwell-time switching signal were used in [Wu, Su, Li, Wang, and Chen \(2021\)](#). In the paper ([Xiong, Sha, & Jin, 2021](#)), the coordination of vehicle platooning at highway junctions was studied, and a Markov decision process to minimise the discounted cumulative travel cost over an infinite time horizon was proposed. A stochastic model integrating the Markov Chain Process was applied to analyse the refuelling patterns of hydrogen fuel vehicles and driver behaviour in [Isaac and Saha \(2021\)](#). In [Zurek, Zieja, Ziolkowski and Borucka \(2020\)](#), Markov processes were used to test the operating process in terms of readiness of military vehicles as an example. Two new reliability indices, multi-point bounded-covering availability and multi-interval bounded-covering availability for discrete time first- and second-order aggregated semi-Markov systems were introduced in [Yi, Cui, and Balakrishnan \(2021\)](#). Multipoint and multi-interval covering availability for aggregated Markov systems were defined in [Yi, Cui, and Shen \(2018\)](#).

Ensuring the required level of readiness of the exploitation system of a transport mode depends on a properly adopted process control strategy derived from optimal decision-making based on the evaluation criteria adopted ([Hogdahl, Bohlin, & Froidh, 2019](#); [Malachowski, Ziolkowski, Legas, Oszczypala, & Szkutnik-Rogoż, 2020](#); [Pyza, Jacyna-Golda, & Golda, 2019](#)). Reliability and service quality are two of the most important factors that increase the use of public transportation. A service quality evaluation model with a three-level hierarchical structure to evaluate public transport systems during the pandemic was proposed in [Tumsekali, Ayyildiz, and Taskin \(2021\)](#). Cumulative Prospect Theory (CPT) was applied to study the impact of travel time reliability on travel mode choice in [Ghader, Darzi, and Zhang \(2019\)](#). One of the most significant features of transit service quality is reliability. Four reliability indicators encompassing both passengers' and operators' perceptions of reliability were selected in [Moosavi, Ismail and Yuen \(2020\)](#) with the objective of improving the reliability of high-frequency bus service and simulation tools used by public transportation companies. To analyse the availability, reliability and security of a cooperative downloading and uploading service in the vehicle platooning system deployment failover technique quantitatively, formulas for availability, Mean Security Capacity to Failure (MSCF), and Mean Time to Failure (MTTF) were derived to evaluate reliability in [Bai, Chang, Trivedi, and Han \(2021\)](#). In [Bhattacharyya, Khan, and Mitra \(2021\)](#), a two-sample nonparametric test based on independent samples was proposed for comparing Mean Time to Failure (MTTF) functions.

The above analysis of the literature reveals that while modelling the readiness of exploitation systems of various technical objects has been studied extensively, there is no universal and comprehensive method of modelling the means of transport exploitation process in terms of technical readiness based on the Laplace transform. Moreover, many models of exploitation processes do not consider assumptions related to the probability distributions of the random variables analysed, which fundamentally impact the selection of the appropriate method. Using mathematical models without understanding and verifying their assumptions can lead to incorrect interpretation of the results and, in turn, faulty conclusions. Programming languages and tools enabling quick analysis of incoming data streams are increasingly used in reliability analysis. One such programming language is R, which is also a computational and graphical tool and is based on the GNU GPL (General Public License GNU) ([Biecek, 2017](#); [Gorecki, 2011](#); [Ihaka & Gentleman, 1996](#)). GNU is an operating system that consists of only free software, e.g. programmes, applications, libraries and developer tools. Many of the programmes in GNU are released under the auspices of the GNU Project and are called GNU packages. The literature review

shows that the development of a method for modelling the exploitation process of means of transport based on the Laplace transform using R has not yet been the subject of research by other authors. Therefore, the aim of this article was to develop an innovative solution in the form of an algorithm designed to determine a reliability measure: the technical readiness coefficient. The proposed algorithm, which is presented in the form of source code ([Appendix E](#)) using the R programming language, eliminates the need to perform complex calculations using traditional methods. In addition, the developed solution is free of charge, and its implementation requires only the installation of the RStudio editor (version 1.4.1106). The universality of the proposed algorithm ensures that functional and numerical reliability characteristics can be determined for any technical objects.

The paper is organised as follows. Section 1 reviews the current state of knowledge in the field of modelling the reliability of technical objects and justifies the purpose of the present article. Section 2 presents the theoretical foundations for the construction of a mathematical model and specifies the subject of the research, along with the availability of actual numerical data used for calculations and analyses. The results of the analysis of the reliability of means of transport based on the Laplace transform are described in Section 3, and sensitivity analysis of the model is performed in Section 4. To validate the proposed method, a simulation model is created in Section 5. The results are discussed in Section 6, and final conclusions and directions for future research are outlined in Section 7.

2. Materials and methods

2.1. Theoretical backgrounds for the mathematical model

Reliability is the probability that an object will perform its purpose adequately for the period of time intended under the operating conditions encountered ([Barlow & Proschan, 1987](#)). Depending on the purpose of the objects and its operating conditions, dependability may also include reliability, durability, storability, and repairability. A reliability model is a mathematical description that enables the determination of appropriate reliability indices of the considered objects while taking into account random changes in their physical states, operating conditions and assigned tasks. A reliability model is a probabilistic model, and therefore it is necessary to correctly determine the probability distribution of the random variables analysed. Statistical verification of properly formulated hypotheses regarding the type of probability distribution is fundamental for further reliability research. The notations used in the proposed mathematical model are presented and described in [Table 1](#).

The value characterising the ability of objects to perform tasks in accordance with their intended use may be the average length of periods until the loss of serviceability after subsequent repairs in the period of operation considered. The alternating renewal process is a sequence of random variables $T_1, \Theta_1, T_2, \Theta_2, T_3, \Theta_3, \dots$ where the random variables T_1, T_2, T_3, \dots are the operating times with the distribution function $F(t)$ and the probability density function $f(t)$. The random variables $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$ are the repair times with the distribution function $G(t)$ and the probability density function $g(t)$. The characteristics of these random variables are the reliability measures ([Barlow & Proschan, 1987](#); [Briolini, 2017](#)).

The Laplace transform of the function $z(t)$, where $t \in (0, \infty)$ is called the function $\bar{z}(s)$ of the complex variable $s = i\omega$, is defined as follows:

$$\mathcal{L}[z(t)] = \bar{z}(s) = \int_0^{\infty} z(t)e^{-st} dt. \quad (1)$$

The inverse Laplace transform is the assignment of the transform $\bar{z}(s)$ to the original $z(t)$ described by the equation:

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{z}(s)]. \quad (2)$$

Table 1
List of the variables.

Notations	Details
T_i	Independent random variables of the operating time where $i = 1, \dots, n$,
$E(T)$	Expected value of the operating time,
Θ_i	Independent random variables of the repair time where $i = 1, \dots, n$,
$E(\Theta)$	Expected value of the repair time,
$F(t)$	Distribution function of the operating time,
$\tilde{F}(s)$	Laplace transform of distribution function of the operating time,
$f(t)$	Probability density function of random variable—operating time,
$\tilde{f}(s)$	Laplace transform of probability density function of the operating time,
$G(t)$	Distribution function of the repair time,
$\tilde{G}(s)$	Laplace transform of distribution function of the repair time,
$g(t)$	Probability density function of random variable—repair time,
$\tilde{g}(s)$	Laplace transform of probability density function of the repair time,
$\tilde{z}(s)$	Laplace transform of $z(t)$ where $t \in (0, \infty)$,
$z(t)$	Inverse Laplace transform,
$\mathcal{L}[f(t)*g(t)]$	Laplace transform of the convolution of the probability density function,
$H(t)$	Renewal function (expected number of renewals in the time interval $(0, t)$),
$\tilde{H}(s)$	Laplace transform of the renewal function,
$h(t)$	Renewal density function,
$\tilde{h}(s)$	Laplace transform of the renewal density function,
$H_u(t)$	Expected number of failures in the time interval $(0, t)$,
$\tilde{H}_u(s)$	Laplace transform of the expected number of failures,
$K(t)$	Readiness function,
$\tilde{K}(s)$	Laplace transform of the readiness function,
$K_u(t)$	Stationary unavailability coefficient,
$K_s(t)$	Technical readiness coefficient,
N	Number of technical objects,
n	Total number of failures (number of observations),
T_p	Mean time between failures (the mean of the failure-free operating time),
λ	Value of the distribution parameter of the operating time,
T_n	Mean repair time,
ν	Value of the distribution parameter of the repair time,
k	Number of class intervals,
n_i	Number of the i th interval for χ^2 test,
np_i	Theoretical numbers for χ^2 test,
W	Critical region for χ^2 test,
l	Number of estimated parameters of the distribution,
α	Significance level.

In technical applications, the Laplace transform of the convolution of, e.g. the probability density function plays an important role and is defined by the formula:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s). \tag{3}$$

The renewal function $H(t)$, which defines the expected number of renewals in the time interval $(0, t)$, has the Laplace transform described by the relation:

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)}{s[1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)]}. \tag{4}$$

The renewal density function $h(t)$ has the Laplace transform given by the equation:

$$\tilde{h}(s) = \frac{\tilde{f}(s)\tilde{g}(s)}{1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)}. \tag{5}$$

The expected number of failures $H_u(t)$ in the interval $(0, t)$ has the following Laplace transform:

$$\tilde{H}_u(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s[1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)]}. \tag{6}$$

The readiness function $K(t)$ (probability of being fit-to-use at a given moment $t > 0$) has a Laplace transform described by the formula:

$$\tilde{K}(s) = \left[1 - \tilde{f}(s)\right] \left[\frac{1}{s} + \tilde{H}(s)\right]. \tag{7}$$

Taking into account Eq. (4), the following formula was obtained:

$$\tilde{K}(s) = \frac{1 - \tilde{f}(s)}{s[1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)]}. \tag{8}$$

If for each $t \geq 0$ the independent random variables of the operating times T_1, T_2, T_3, \dots have an exponential distribution, for which the cumulative distribution function and the probability density function are determined by the following equations:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{9}$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{10}$$

then, using the Laplace transform properties, the following equations are true:

$$\tilde{F}(s) = L[1 - e^{-\lambda t}] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \lambda}, \tag{11}$$

$$\tilde{f}(s) = L[\lambda e^{-\lambda t}] = \frac{\lambda}{s + \lambda}. \tag{12}$$

Independent random variables of the repair times $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots$ characterised by exponential distribution with distribution function and probability density function:

$$G(t) = 1 - e^{-\nu t}, \tag{13}$$

$$g(t) = \nu e^{-\nu t}, \tag{14}$$

can be expressed in terms of the Laplace transform as follows:

$$\tilde{G}(s) = L[1 - e^{-\nu t}] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \nu}, \tag{15}$$

$$\tilde{g}(s) = L[\nu e^{-\nu t}] = \frac{\nu}{s + \nu}. \tag{16}$$

The basis of reliability research is probability theory, which results from the fact that the reliability properties of objects are probabilistic properties and should be considered using such methods.

2.2. Research case description

Twenty-five means of transport of the same type carrying out transport tasks in the territory of the Republic of Poland were tested. Medium-duty high-mobility trucks with a curb weight of 7350 (kg) and a load capacity of 4000 ÷ 8000 (kg) were considered. All means of transport came from one production line, which made the sample homogeneous. The numerical data necessary to determine the numerical and functional characteristics and to estimate the parameters of the model of the exploitation process of the means of transport were taken from exploitation documents such as travel orders and technical service cards in the period from 01.01.2017 do 31.12.2017. In the model of the exploitation process with non-negligible object renewal time, the repair time is the total time required to restore operational condition and includes, among other time costs, the damage diagnosis time, actual repair time and inspection time. In Table 2, the operating times and repair times of the considered group of means of transport were expressed in minutes.

If a given object operates for period T_1 and damage occurs at time t_1 , then the vehicle undergoes renewal for duration Θ_1 . The cycle may repeat itself, which means that the renewed vehicle works for period T_2 , damage occurs at time t_2 , and renewal takes Θ_2 . The diagram of the exploitation process in which $t_i = T_1 + \Theta_1 + \dots + T_{i-1} + \Theta_{i-1} + T_i$, which corresponds to the moments of failure, and $t'_i = T_1 + \Theta_1 + \dots + T_{i-1} + \Theta_{i-1} + T_i + \Theta_i$, which corresponds to the moments of renewal, are depicted in Fig. 1.

If N objects of the same type are tested simultaneously, then the mean time between failures is the quotient of the cumulative operating time of all objects to the total number of failures (Biolini, 2017), which can be expressed by the following equation:

$$T_p = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{n}, \tag{17}$$

where:

Table 2
Data for numerical example.

Means of transport	The operating time T_i (min.)	The repair time θ_i (min.)
Object 1	462 725.0	610.0
Object 2	22 050.0	4320.0
Object 2	388 800.0	7170.0
Object 3	13 480.0	2850.0
Object 3	41 725.0	7225.0
Object 4	56 585.0	480 0
Object 4	90 265.0	8610.0
Object 4	109 480.0	24 440.0
Object 5	128 531.0	18 115.0
Object 6	24 930.0	11 550.0
Object 6	472 290.0	16 830.0
Object 7	245 630.0	16 830.0
Object 8	145 890.0	2880.0
Object 9	17 940.0	47 497.0
Object 10	122 850.0	25 900.0
Object 10	56 180.0	450.0
Object 11	224 770.0	24 010.0
Object 12	37 890.0	4345.0
Object 13	156 280.0	5400.0
Object 14	45 090.0	1470.0
Object 14	7170.0	5820.0
Object 15	53 780.0	90.0
Object 15	70 420.0	3240.0
Object 15	277 560.0	10 240.0
Object 16	143 010.0	24 450.0
Object 16	233 310.0	26 033.0
Object 17	199 370.0	2915.0
Object 18	380 615.0	4335.0
Object 19	66 695.0	240.0
Object 20	40 213.0	5612.0
Object 21	428 130.0	27 295.0
Object 22	281 110.0	4167.0
Object 23	107 010.0	37 560.0
Object 24	344 610.0	1470.0
Object 24	162 690.0	16 830.0
Object 25	375 000.0	37 220.0
Object 25	194 850.0	15 320.0

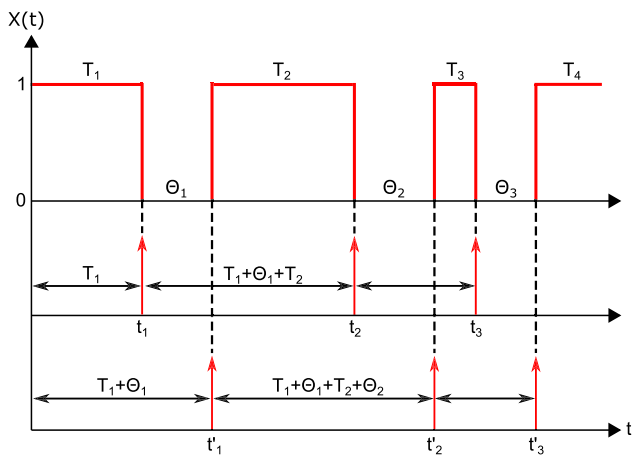


Fig. 1. The diagram of the exploitation process where: 1 - state of readiness, 0 - state of unavailability.

N - the number of objects,

T_i - the time of correct operation of the i -object,

n - the total number of failures (number of observations).

Using (17), the expected value of operating time is:

$$T_p = \frac{6\,228\,924.0}{37} \approx 168\,349.297 \text{ (min.)}. \tag{18}$$

If, in the exploitation process, the objects are repaired n times and the durations of individual repairs are respectively $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ then the

mean repair time can be calculated according to the formula:

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^N \theta_i}{n}, \tag{19}$$

where:

θ_i - time of the i th renewal.

Based on the data from Table 2 and relationship (19), the following formula was obtained:

$$T_n = \frac{453\,819.0}{37} \approx 12\,265.378 \text{ (min.)}. \tag{20}$$

This expression is an estimate of the expected value of the repair time. The measure of reparability is the probability that the objects considered will be restored to a condition of serviceability. Maintainability depends both on the properties of the objects and the conditions under which they are renewed. Some of the most important factors influencing reparability are:

- availability of components that require repair or replacement,
- time needed to complete the repair,
- protection against possible malfunctions (equipping with additional monitoring devices),
- failure localisation time,
- equipment for service and repair stations,
- organisation of periodic maintenance,
- difficulties in establishing the causes of failure,
- level of training and number of staff.

The flowchart of the algorithm proposed in this paper for determining selected reliability characteristics, e.g. the technical readiness coefficient, for the technical objects considered is presented in Fig. 2.

3. Results

Statistical inference about probabilistic models of random variables in the population of objects on the basis of the results of examining a random sample may consist, for example, of the verification of a statistical hypothesis concerning the functional form of the distribution of the random variable or the estimation of an unknown value of a probability distribution parameter. Both during the verification of statistical hypotheses and the estimation of distribution parameters, one should use appropriately constructed test statistics, which are a function of the observed results of a random sample. To verify the hypothesis concerning the compliance of the empirical distribution with the hypothetical distribution with a known cumulative function, χ^2 Pearson's test of goodness of fit was used (Stanisz, 2006). The test statistic was calculated according to the relationship:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{21}$$

where:

k - the number of class intervals,

n_i - the empirical numbers (the number of the i th interval),

np_i - the theoretical numbers.

The following hypotheses were verified:

$$H_0 : F(x) = F_0(x),$$

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x),$$

where:

$F(x)$ - the empirical distribution function,

$F_0(x)$ - the theoretical distribution function (exponential distribution).

Assuming that the null hypothesis H_0 is true, the calculated statistic has χ^2 -distribution of $k - l - 1$ degrees of freedom. The critical region of the test is defined as follows:

$$W = \left[\chi_{1-\alpha, k-l-1}^2, \infty \right), \tag{22}$$

where:

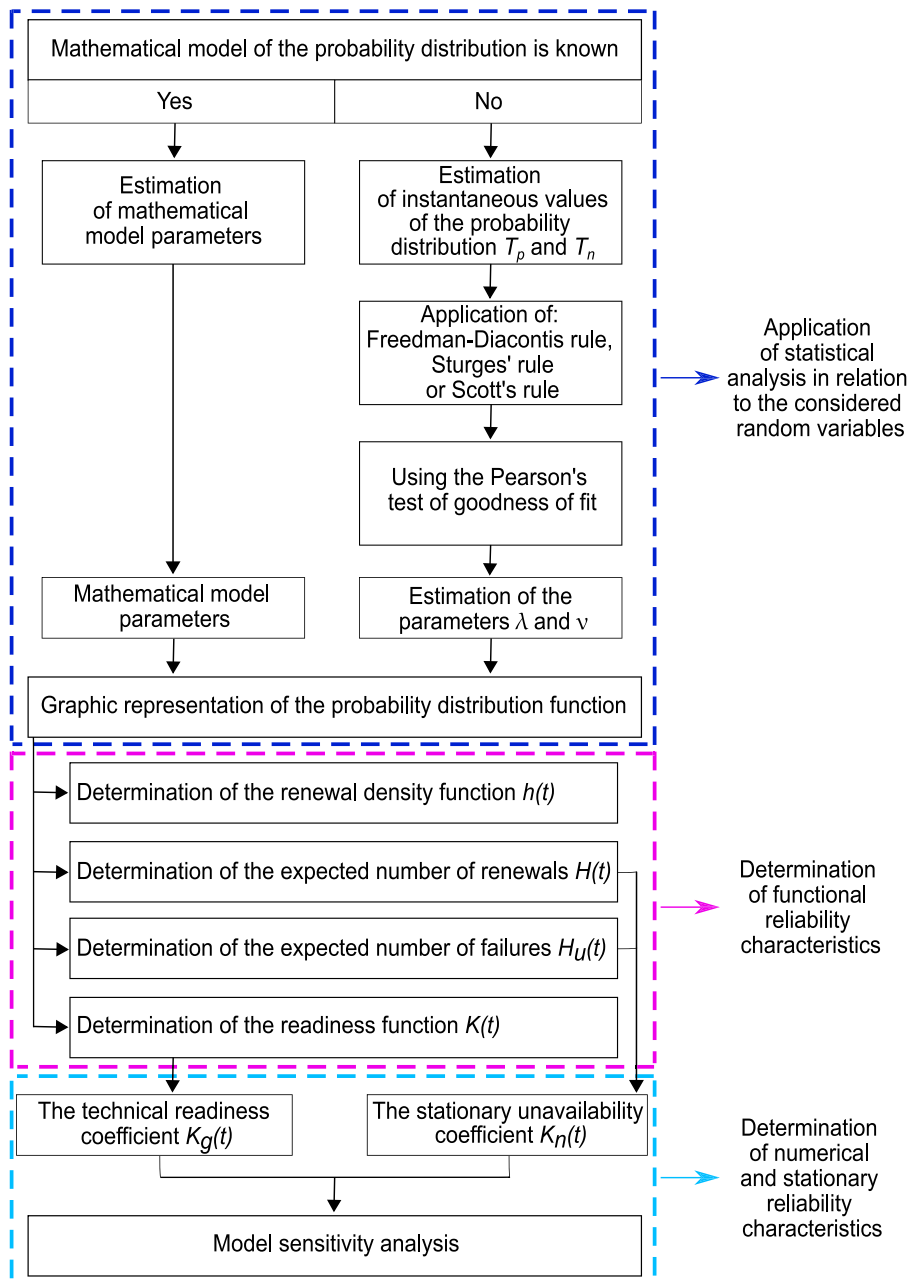


Fig. 2. Flowchart of the proposed algorithm.

l - the number of estimated parameters of the distribution,
 α - the significance level.

In a situation where $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2$, hypothesis H_0 should be rejected. Otherwise, there is no reason to reject the H_0 hypothesis. χ^2 Pearson's test of goodness of fit can be used for both continuous and step random variables. First, it is necessary to determine the number of class intervals k . In the literature, there is a lack of clarity on not only the general size of a random sample but also the minimum size of individual classes. The most popular methods of selecting the number of class intervals include the Freedman-Diaconis rule, Sturges' rule and Scott's

rule (Ahmadi, 2019; Barraza, Valdez, Melin, & Gonzalez, 2020; Biecek, 2017; Gorecki, 2011). Some authors propose using a special table linking the number of classes to the number of observations to determine the number of class intervals (Stanisz, 2006). To reveal the nature of the distribution, the number of class intervals must be neither too small nor too large. If the number of class intervals is too large, the

histogram will not reveal the underlying distribution of the observed data clearly (Kececioglu, 2002). The optimal number of class intervals for n observations was calculated using Sturges' rule:

$$k = 1 + 3.222 \log(n). \tag{23}$$

According to Eqs. (23), 6 class intervals were obtained. The results of the χ^2 test for the random variable of the operating time are presented in Table 3. The lower and the upper limits of the i th class interval are indicated by l_i and u_i respectively.

The value of the test statistic χ^2 determined in relation to the random variable of the operating time is 0.631, and the critical region $W = [9.4877, \infty)$. Since $\chi^2 \notin W$, at the set significance level of $\alpha = 0.05$, there are no grounds to reject the hypothesis H_0 , which means that the distribution of the random variable of the operating time is consistent with the exponential distribution. RStudio can automatically compute a p -value for the χ^2 test. However, the automatic execution of the `chisq.test` function incorrectly selects the number

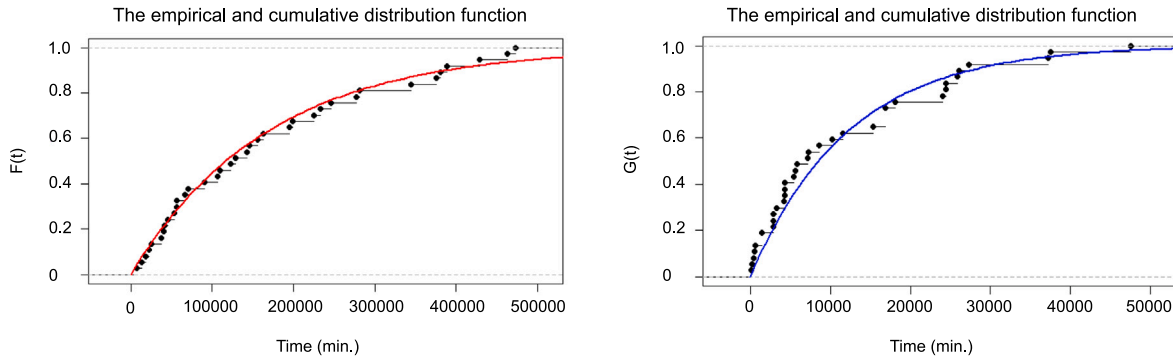


Fig. 3. The empirical distribution function and cumulative distribution function of T_i and θ_i .

Table 3
The results of the χ^2 test for the random variable of the operating time.

l_i	u_i	n_i	p_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	42 308	8	0.2222	0.0060
42 308	126 924	10	0.3073	0.1648
126 924	169 232	5	0.1046	0.3309
169 232	253 848	5	0.1446	0.0228
253 848	380 772	5	0.1172	0.1013
380 772	5 000 000	4	0.1042	0.0055

Table 4
The results of the χ^2 test for the random variable of the repair time.

l_i	u_i	n_i	p_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	4231	12	0.2917	0.1346
4231	8462	8	0.2066	0.0165
8462	16 924	7	0.2500	0.5473
16 924	25 386	4	0.1254	0.0883
25 386	38 079	5	0.0814	1.3140
38 079	500 000	1	0.0448	0.2619

of degrees of freedom, which is of key importance when determining the p -value (Gorecki, 2011). For the automatically assumed incorrect number of degrees of freedom of 5, an incorrect result was obtained, $p = 0.9865$. Therefore, the determination of the number of degrees of freedom should always be consistent with the assumptions of the test, which is included in the source code attached in Appendix E. As a result, $p = 0.9595$ was obtained. Since the determined p -value is greater than the adopted significance level $\alpha = 0.05$, there are no grounds for rejecting hypothesis H_0 . Moreover, the fact that the p -value is greater than 0.1 shows that the decision is unambiguous. In Table 4, the results of the χ^2 test are presented for the random variable of the repair time.

By analysing the compliance of the empirical distribution with the theoretical (exponential) distribution for the random variable of the repair time, $\chi^2 = 2.362$ was obtained. As only one distribution parameter was estimated on the basis of the sample, the critical region $W = [9.4877, \infty)$ was determined. The value of the test statistic is $\chi^2 \notin W$. Hence, at the significance level $\alpha = 0.05$, there are no grounds to reject the hypothesis H_0 , which means that the distribution of the random variable of the repair time conforms to the exponential distribution. In determining the p -value, the automatic selection of the number of degrees of freedom again leads to incorrect results. Taking into account the assumptions of the test and using the source code developed for this article, $p = 0.6698$ was obtained, which confirms the unambiguity of the decision regarding the lack of grounds for rejecting H_0 . The course of the empirical distribution function and cumulative distribution function in relation to the considered random variables are presented in Fig. 3.

Knowledge of the type of distribution of random variables enables the use of parametric estimation methods (Farshid, Mohammad, &

Mohammad, 2022). In the model considered here, T_p is an estimator of the expected value of operating time, while T_n is an estimator of the expected value of repair time. Based on empirical data, it is possible to determine unknown values of the distribution parameters of the random variables considered:

$$T_p = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 5.94 \times 10^{-6} \text{ (1/min.)}, \tag{24}$$

$$T_n = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \nu = 8.15 \times 10^{-5} \text{ (1/min.)}. \tag{25}$$

The Laplace transform, which allows differential equations to be solved by transforming them into algebraic equations, is of special importance for reliability analysis. To determine the renewal density function $h(t)$ using the Laplace transform and the dependencies (5), (12), (16), the following equation was obtained:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(s) &= \frac{\frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)}}{1 - \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)}} = \frac{\lambda\nu}{(s+\lambda)(s+\nu)} \cdot \frac{(s+\lambda)(s+\nu)}{(s+\lambda)(s+\nu) - \lambda\nu} \\ &= \frac{\lambda\nu}{s(s+\nu+\lambda)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Decomposition into simple fractions gives:

$$\frac{\lambda\nu}{s(s+\nu+\lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+\nu+\lambda)}. \tag{27}$$

Derivation of a formula (27) is included in Appendix A. Using the properties of the Laplace transform:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = 1, \tag{28}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+\nu+\lambda} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - (-(\nu+\lambda))} \right] = e^{-(\nu+\lambda)t}, \tag{29}$$

the renewal density function is defined as follows:

$$h(t) = \frac{\lambda\nu}{\nu+\lambda} [1 - e^{-(\nu+\lambda)t}]. \tag{30}$$

To determine the renewal density in a situation where $t \rightarrow \infty$, the following relationship should be used:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda\nu}{\nu+\lambda} [1 - e^{-(\nu+\lambda)t}] = \frac{\lambda\nu}{\nu+\lambda}. \tag{31}$$

According to Eqs. (24) and (25), the course of the renewal density function, where $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 5.54 \times 10^{-6}$, is shown in Fig. 4.

The renewal density can be interpreted as the expected number of renewals per unit of time. The calculations reveal a slight difference between $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 5.54 \times 10^{-6}$ and the estimation of the parameter $\lambda = 5.94 \times 10^{-6}$. A relationship in which the intensity of damage is close or equal to the renewal density is typical of an exponential distribution, which provides additional confirmation of the correctness of the verification of the formulated statistical hypotheses concerning the type of distribution of the random variable of operating time. On the other hand, knowledge of the course of the intensity of the failure function enables the collection of essential information regarding:

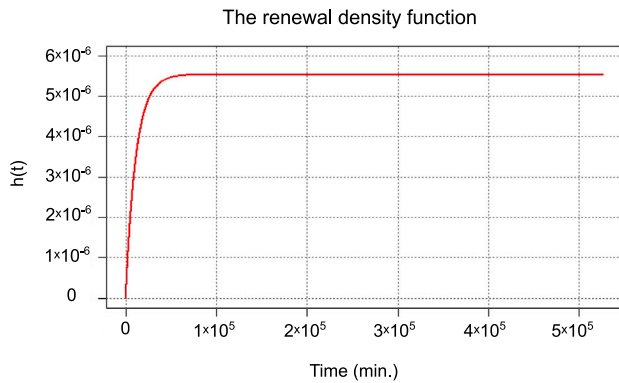


Fig. 4. The course of the renewal density function.

- proper equipment of objects with spare parts and tools,
- appropriate production volumes of spare parts,
- the definition of periods of useful operation of technical objects,
- the advisability of using preventive replacements of parts or assemblies,
- determination of the optimal durability of objects,
- planning of the recovery of scarce elements or assemblies from renovated and scrapped objects.

To determine the expected number of renewals in the time interval $(0, t)$ the Eqs. (4), (12) and (16) should be used:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s) &= \frac{\frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)}}{s \left[1 - \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)} \right]} = \frac{\lambda\nu}{(s+\lambda)(s+\nu)} \cdot \frac{(s+\lambda)(s+\nu)}{s^2(s+\nu+\lambda)} \\ &= \frac{\lambda\nu}{s^2(s+\nu+\lambda)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Applying the decomposition into simple fractions, the following relationship was obtained:

$$\frac{\lambda\nu}{s^2(s+\nu+\lambda)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{(s+\nu+\lambda)}. \quad (33)$$

Derivation of a formula (33) is included in Appendix B.

Using the properties of (28), (29) and:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] = t, \quad (34)$$

the expected number of renewals in the interval $(0, t)$ is described by the equation:

$$H(t) = \frac{\lambda\nu}{(\nu+\lambda)^2} \left[-1 + (\lambda+\nu)t + e^{-(\lambda+\nu)t} \right]. \quad (35)$$

Theorem 1 (Birolini, 2017). *If the simple renewal stream is not periodic, then for every $\delta > 0$ the condition occurs:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H(t+\delta) - H(t)] = \frac{\delta}{E(T) + E(\Theta)}.$$

Conclusion 1. *For $t \rightarrow \infty$, the expected number of renewals in the interval $(t, t+\delta)$ does not depend on t .*

Taking advantage of the fact that the expected number of failures has the Laplace transform described by the formula (6), it is possible to determine $H_u(t)$. To do this, the Eqs. (12) and (16) should be used:

$$\tilde{H}_u(s) = \frac{\tilde{f}(s)}{s \left[1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s) \right]} = \frac{\frac{\lambda}{(s+\lambda)}}{s \left[1 - \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)} \right]} = \frac{\lambda(s+\nu)}{s^2(s+\nu+\lambda)}. \quad (36)$$

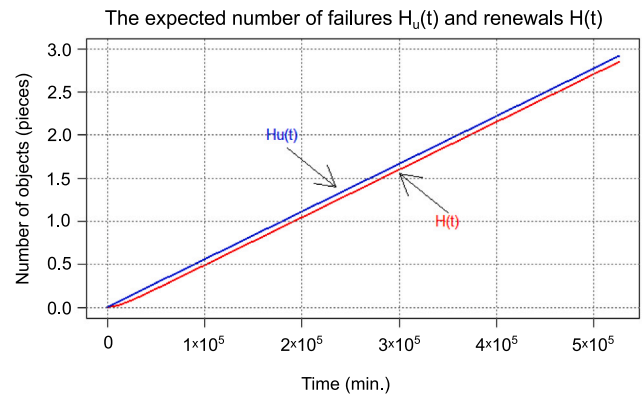


Fig. 5. The graph of the expected number of failures and the expected number of renewals of the considered fleet of means of transport.

When decomposing into simple fractions, the following equation can be obtained:

$$\frac{\lambda(s+\nu)}{s^2(s+\nu+\lambda)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{(s+\nu+\lambda)}. \quad (37)$$

Derivation of a formula (37) is included in Appendix C. Using the properties (28), (29) and (34), the expected number of failures can be determined using the following relationship:

$$H_u(t) = \frac{\lambda}{(\nu+\lambda)^2} \left[\lambda + \nu(\lambda+\nu)t - \lambda e^{-(\lambda+\nu)t} \right]. \quad (38)$$

Theorem 2 (Birolini, 2017). *If the simple renewal stream is not periodic, then for every $\epsilon > 0$ the condition occurs:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H_u(t+\epsilon) - H_u(t)] = \frac{\epsilon}{E(T) + E(\Theta)}.$$

Conclusion 2. *For $t \rightarrow \infty$, the expected number of renewals in the interval $(t, t+\epsilon)$ does not depend on t .*

The graph of the expected number of failures and the expected number of renewals of the considered fleet of means of transport, which are linear for random variables determined by the exponential distribution is shown in Fig. 5. Since it follows from Theorems 1 and 2 that for $t \rightarrow \infty$ and for every $\delta > 0, \epsilon > 0$ if $\delta \approx \epsilon$, then:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H_u(t+\epsilon) - H_u(t)] \approx \lim_{t \rightarrow \infty} [H(t+\delta) - H(t)]. \quad (39)$$

The quantitative measures of system reliability are reliability indicators that can be determined by both analytical and simulation methods. The value of the selected reliability indicator of the considered system is an appropriate function of the probabilistic characteristics of the reliability model. Therefore, the basis for determining the stationary unavailability coefficient is the knowledge of the expected number of failures and the expected number of renewals of the considered objects. The stationary unavailability coefficient $K_n(t)$, which is the difference between the expected number of failures and the expected number of renewals, is described by the relationship:

$$\begin{aligned} K_n(t) = H_u(t) - H(t) &= \frac{\lambda}{(\nu+\lambda)^2} \left[\lambda + \nu(\lambda+\nu)t - \lambda e^{-(\lambda+\nu)t} \right] \\ &\quad - \frac{\lambda}{(\nu+\lambda)^2} \left[-1 + (\lambda+\nu)t + e^{-(\lambda+\nu)t} \right], \end{aligned} \quad (40)$$

$$K_n(t) = H_u(t) - H(t) = \frac{\lambda}{\nu+\lambda} \left[1 - e^{-(\lambda+\nu)t} \right]. \quad (41)$$

It should be noted that $K_n(t) = 0$ for $t = 0$, while for $t \rightarrow \infty$, is:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\nu+\lambda} \left[1 - e^{-(\lambda+\nu)t} \right] = \frac{\lambda}{\nu+\lambda}. \quad (42)$$

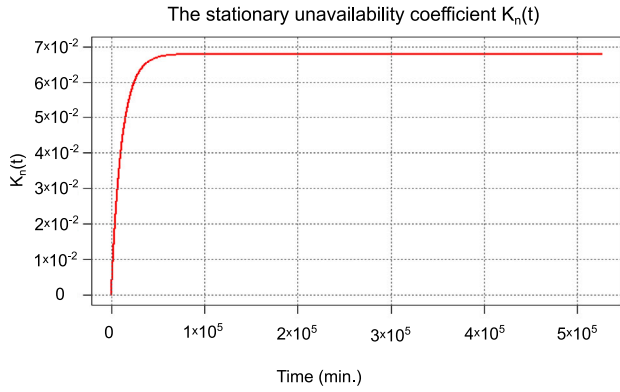


Fig. 6. The stationary unavailability coefficient of the considered means of transport.

For the considered objects, the stationary unavailability coefficient is $K_n(t) = 6.79 \times 10^{-2}$. The graph of the function constituting the difference between the expected number of failures and the expected number of renewals of the considered means of transport as a function of time was shown in Fig. 6.

Readiness means the ability to immediately carry out the tasks commissioned at the right time and place under the given operating conditions. From the dependencies (12), (16) and the fact that the readiness function $K(t)$ has a Laplace transform defined by the formula (8), the following equations are true:

$$\tilde{K}(s) = \frac{1 - \tilde{f}(s)}{s [1 - \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)]} = \frac{1 - \frac{\lambda}{(s+\lambda)}}{s \left[1 - \frac{\lambda}{(s+\lambda)} \cdot \frac{\nu}{(s+\nu)} \right]} = \frac{s + \nu}{s(s + \nu + \lambda)}. \quad (43)$$

Using the decomposition into simple fractions again:

$$\frac{s + \nu}{s(s + \nu + \lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \nu + \lambda}. \quad (44)$$

Derivation of a formula (44) is included in Appendix D. Based on the properties (28) and (29), it is possible to define the readiness function:

$$K(t) = \frac{1}{\nu + \lambda} [\nu + \lambda e^{-(\lambda+\nu)t}]. \quad (45)$$

In a situation where the operating time is considered as the sum of the time of correct work while the repair time is the total repair time of the technical objects under consideration, the readiness coefficient is called the technical readiness coefficient. The value of the technical readiness coefficient can be expressed as the quotient of the total time that the objects are in a fit condition to the total time that the objects are fit and unfit for transport tasks. In the case when $t \rightarrow \infty$, the technical readiness coefficient can be written as follows:

$$K_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\nu + \lambda} [\nu + \lambda e^{-(\lambda+\nu)t}] = \frac{\nu}{\nu + \lambda}. \quad (46)$$

Based on the calculations, the technical readiness coefficient of the vehicle fleet studied was determined based on the dependencies (24) and (25), which for $t \rightarrow \infty$ is 93.21(%), as additionally confirmed by the readiness function. The course of the readiness function of the means of transport considered is illustrated in Fig. 7.

The technical readiness coefficient can be interpreted as the share of the time the technical objects are in an exploitability state over the entire operation period, while the readiness function means the probability of an event in which the system in question will be in an exploitability state at any given time t . The reduction of the technical readiness coefficient was influenced by the delay in the supply of spare parts, which significantly extended the renewal time of the objects labelled with numbers 9 and 23. The source code of the programme enabling the determination of both functional and numerical reliability characteristics is included in Appendix E.

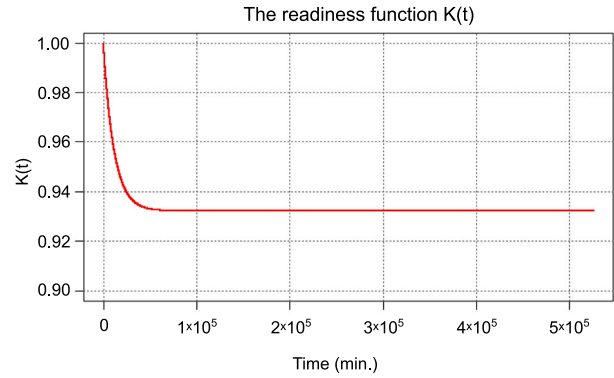


Fig. 7. The course of the readiness function.

Table 5

The stationary unavailability coefficient and the technical readiness coefficient for $t \rightarrow \infty$ and selected values of λ and ν .

	$\nu = 8.15 \times 10^{-5}$ (1/min.)		$\lambda = 5.94 \times 10^{-6}$ (1/min.)		
	$K_n(t)$	$K_g(t)$	$K_n(t)$	$K_g(t)$	
$\lambda_1 = 3.94 \times 10^{-6}$	0.046	0.954	$\nu_1 = 6.15 \times 10^{-5}$	0.088	0.912
$\lambda_2 = 4.94 \times 10^{-6}$	0.057	0.943	$\nu_2 = 7.15 \times 10^{-5}$	0.077	0.923
$\lambda_3 = 5.94 \times 10^{-6}$	0.068	0.932	$\nu_3 = 8.15 \times 10^{-5}$	0.068	0.932
$\lambda_4 = 6.94 \times 10^{-6}$	0.078	0.922	$\nu_4 = 9.15 \times 10^{-5}$	0.061	0.939
$\lambda_5 = 7.94 \times 10^{-6}$	0.089	0.911	$\nu_5 = 10.15 \times 10^{-5}$	0.055	0.945

4. Model sensitivity analysis

The results of the analysis of the variability of the stationary unavailability coefficient depending on the time horizon are presented in Fig. 8.

The value of the stationary unavailability coefficient of the fleet of vehicles considered increased fastest in the initial period of operation, i.e. $0 \leq t \leq 50\,000.0$ (min.), where $0 \leq K_n(t) \leq 6.71$ (%). The calculations performed show that in the time interval $50\,000.0 < t < 112\,320.0$ (min.), there was a slight increase in the stationary unavailability coefficient of $6.71 < K_n(t) < 6.79$ (%). It should be noted that for $t \geq 112\,320.0$ (min.), a constant value of the stationary unavailability coefficient equal to 6.79(%) was obtained.

For the analysis of the variability of the technical readiness coefficient depending on time, the course of the readiness function of the transport system under consideration is presented in Fig. 9. In the initial period of operation, there was a noticeable decrease in the value of the technical readiness coefficient, which could be caused by existing factory defects. The readiness function stabilised in the range of $50\,000.0 < t < 112\,320.0$ (min.), for which $93.29 > K_g(t) > 93.21$ (%), while for $t \geq 112\,320.0$ (min.), a constant value of the technical readiness coefficient equal to 93.21(%) was obtained.

The selected limit values of the stationary unavailability coefficient and the technical readiness coefficient for two variants, i.e. for a constant value of ν and variable values of λ and for a constant value of λ and variable values of ν are presented in Table 5.

The performed calculations show that as parameter λ increases at a constant value of ν , the technical readiness coefficient decreases, while the stationary unavailability coefficient increases. Changing parameter λ by only 0.000004 (1/min.) reduces the technical readiness coefficient by as much as 4.3(%), whereas, when parameter ν increases at a constant value of parameter λ , the technical readiness coefficient increases, and the stationary unavailability coefficient decreases. Increasing parameter ν by 0.00004 (1/min.) is caused enhancement the technical readiness coefficient by 3.3(%). The courses of the limit reliability characteristics for a constant value of parameter ν and variable values of λ are shown in Fig. 10.

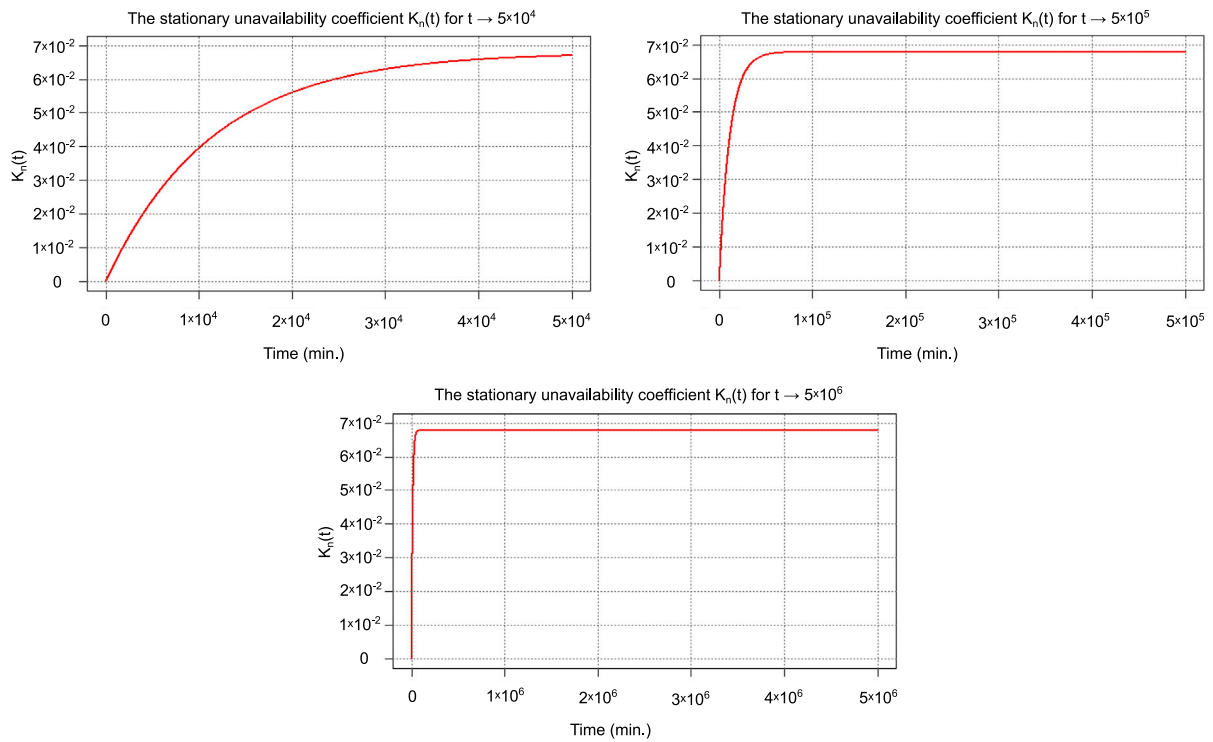


Fig. 8. The stationary unavailability coefficient depending on t .

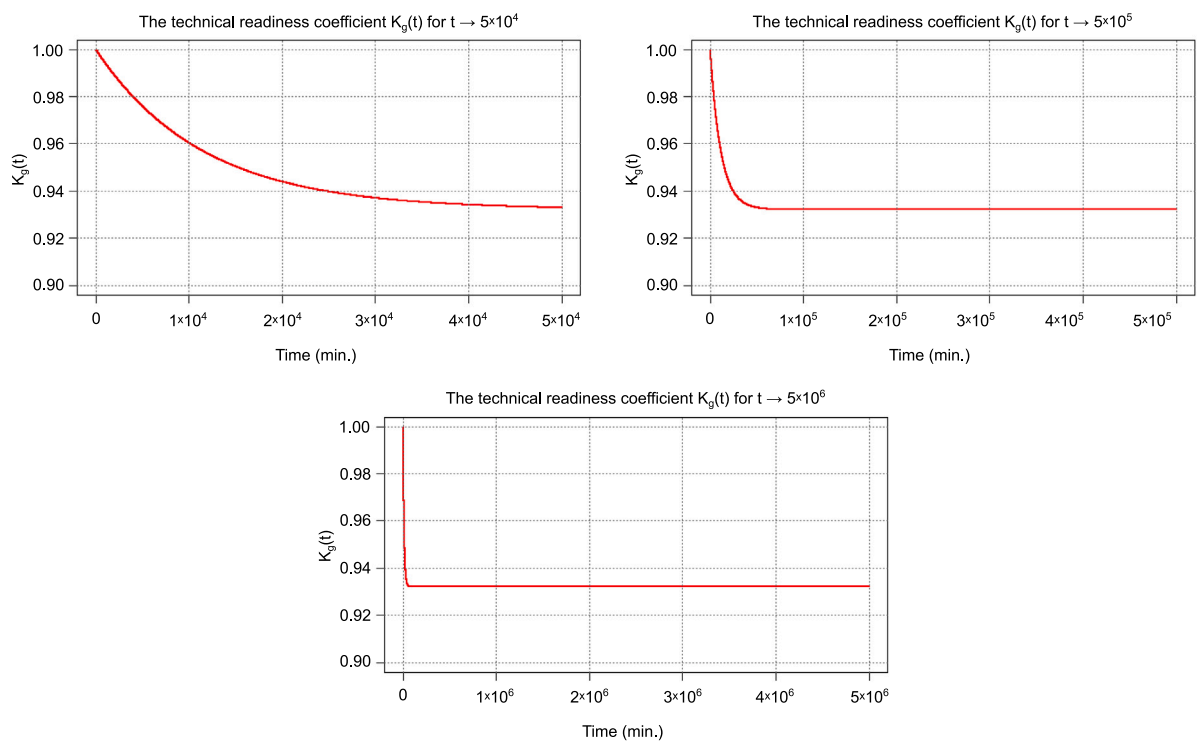


Fig. 9. The technical readiness coefficient depending on t .

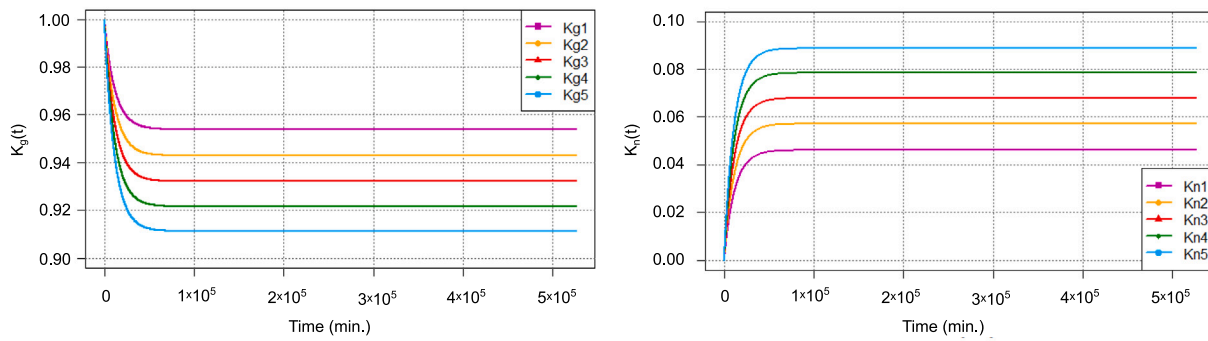


Fig. 10. The courses of the limit reliability characteristics for the variable values of λ and $\nu = 8.15 \times 10^{-5}$ (1/min.).

Table 6

The values of parameters in the distribution of random variables considered in the sensitivity analysis.

The values of parameter λ_i (1/min.)	The values of parameter ν_j (1/min.)
$\lambda_1 = 1.94 \times 10^{-6}$	$\nu_1 = 4.15 \times 10^{-5}$
$\lambda_2 = 2.94 \times 10^{-6}$	$\nu_2 = 5.15 \times 10^{-5}$
$\lambda_3 = 3.94 \times 10^{-6}$	$\nu_3 = 6.15 \times 10^{-5}$
$\lambda_4 = 4.94 \times 10^{-6}$	$\nu_4 = 7.15 \times 10^{-5}$
$\lambda_5 = 5.94 \times 10^{-6}$	$\nu_5 = 8.15 \times 10^{-5}$
$\lambda_6 = 6.94 \times 10^{-6}$	$\nu_6 = 9.15 \times 10^{-5}$
$\lambda_7 = 7.94 \times 10^{-6}$	$\nu_7 = 10.15 \times 10^{-5}$
$\lambda_8 = 8.94 \times 10^{-6}$	$\nu_8 = 11.15 \times 10^{-5}$
$\lambda_9 = 9.94 \times 10^{-6}$	$\nu_9 = 12.15 \times 10^{-5}$

Table 7

The technical readiness coefficient for $t \rightarrow \infty$ depending on the parameters λ_i and ν_j .

$K_g(t)$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
ν_1	0.955	0.934	0.913	0.894	0.875	0.857	0.839	0.823	0.815
ν_2	0.964	0.946	0.929	0.913	0.897	0.881	0.866	0.852	0.846
ν_3	0.969	0.954	0.940	0.926	0.912	0.899	0.886	0.873	0.867
ν_4	0.974	0.961	0.948	0.935	0.923	0.912	0.900	0.889	0.884
ν_5	0.977	0.965	0.954	0.943	0.932	0.922	0.911	0.901	0.897
ν_6	0.979	0.969	0.959	0.949	0.939	0.930	0.920	0.911	0.907
ν_7	0.981	0.972	0.963	0.954	0.945	0.936	0.927	0.919	0.915
ν_8	0.983	0.974	0.966	0.958	0.949	0.941	0.934	0.926	0.922
ν_9	0.984	0.976	0.969	0.961	0.953	0.946	0.939	0.931	0.928

In order to carry out the sensitivity analysis of the stationary unavailability coefficient and the technical readiness coefficient, the values of parameters in the distribution of random variables included in the analysis were shown in Table 6.

The results of the sensitivity analysis in relation to the technical readiness coefficient and the stationary unavailability coefficient depending on the changes in the parameters values of the distribution of the random variables under consideration were presented in Tables 7 and 8.

The highest value of the technical readiness coefficient of 98.4% was obtained in the model with the parameters λ_1 and ν_9 . Because $T_{p1} = \frac{1}{\lambda_1}$ and $T_{n9} = \frac{1}{\nu_9}$, it follows that $T_{p1} = 515\,463.917$ (min.), while $T_{n9} = 8228.421$ (min.). This means that in order to increase the technical readiness coefficient of the vehicle fleet from 93.2% to 98.4%, the mean time between failures should be increased by 347 114.621 (min.), and the mean renewal time should be shortened by 4036.957 (min.). The lowest value of the technical readiness coefficient equal 81.5% was obtained in the model with the following parameters λ_9 and ν_1 . The decrease in the value of the technical readiness coefficient was highest at a constant value of ν_1 and increasing λ_i and lowest at a constant value of ν_9 and increasing λ_i . The results of the sensitivity analysis of the limit reliability characteristics are shown in Fig. 11.

Table 8

The stationary unavailability coefficient for $t \rightarrow \infty$ depending on the parameters λ_i and ν_j .

$K_n(t)$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
ν_1	0.045	0.066	0.087	0.106	0.125	0.143	0.161	0.177	0.185
ν_2	0.036	0.054	0.071	0.087	0.103	0.119	0.134	0.148	0.154
ν_3	0.031	0.046	0.060	0.074	0.088	0.101	0.114	0.127	0.133
ν_4	0.026	0.039	0.052	0.065	0.077	0.088	0.100	0.111	0.116
ν_5	0.023	0.035	0.046	0.057	0.068	0.078	0.089	0.099	0.103
ν_6	0.021	0.031	0.041	0.051	0.061	0.070	0.080	0.089	0.093
ν_7	0.019	0.028	0.037	0.046	0.055	0.064	0.073	0.081	0.085
ν_8	0.017	0.026	0.034	0.042	0.051	0.059	0.066	0.074	0.078
ν_9	0.016	0.024	0.031	0.039	0.047	0.054	0.061	0.069	0.072

5. Validation

To validate the proposed method, a simulation model was created and also implemented in R. The R programming language has built-in algorithms for not only determining density, distribution functions, quantiles for arbitrary distributions, but also for generating random numbers. By preceding the name of the selected distribution with the letter 'r' (from the word 'random'), a random number generator is started. Since the random variables considered in the model followed an exponential distribution, to generate random observations for the exponential distribution, the 'rexp' function was used. The length of the result can be arbitrarily determined by the argument n (number of observations). In order for our results to be replicated by other authors, the generator seeds we adopted are given in Table 9. In order to determine the technical readiness coefficient, 200 simulations were carried out for different generator seeds and different numbers of generated samples. In our study, based on 74 observations, the technical readiness coefficient of the vehicle fleet under consideration was 93.21%. As a result of the simulation, the readiness coefficient values obtained for each of the considered variants are summarised in Table 9 and illustrated in Fig. 12.

The technical readiness coefficient calculated from the random samples generated is consistent with the results of our proposed algorithm. The largest discrepancies were noted for the simulation in which the generated samples did not exceed 100 observations. In addition, it is worth noting that our algorithm made it possible to accurately determine the value of the technical readiness coefficient on the basis of only 74 observations, so it can be successfully used to model the technical readiness of any technical objects, especially those in which access to empirical data is limited.

6. Discussion

An algorithm for modelling the technical readiness of means of transport using the Laplace transform and the R programming language

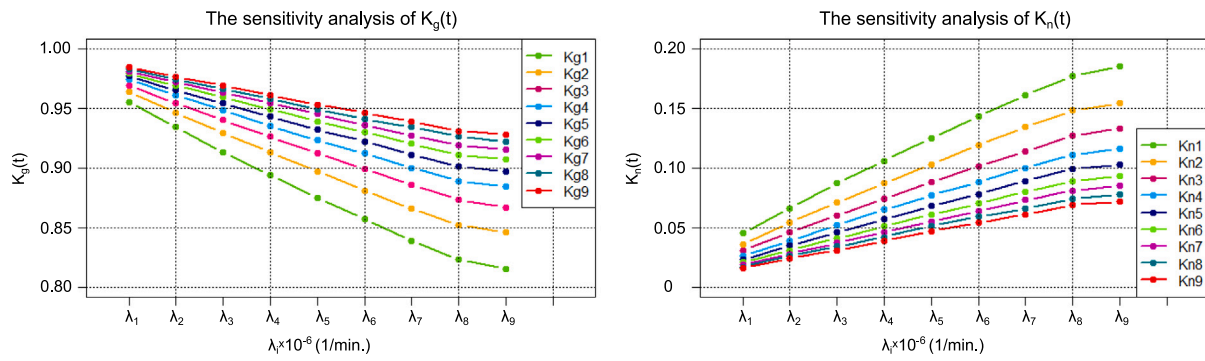


Fig. 11. The results of the sensitivity analysis of the limit reliability characteristics.

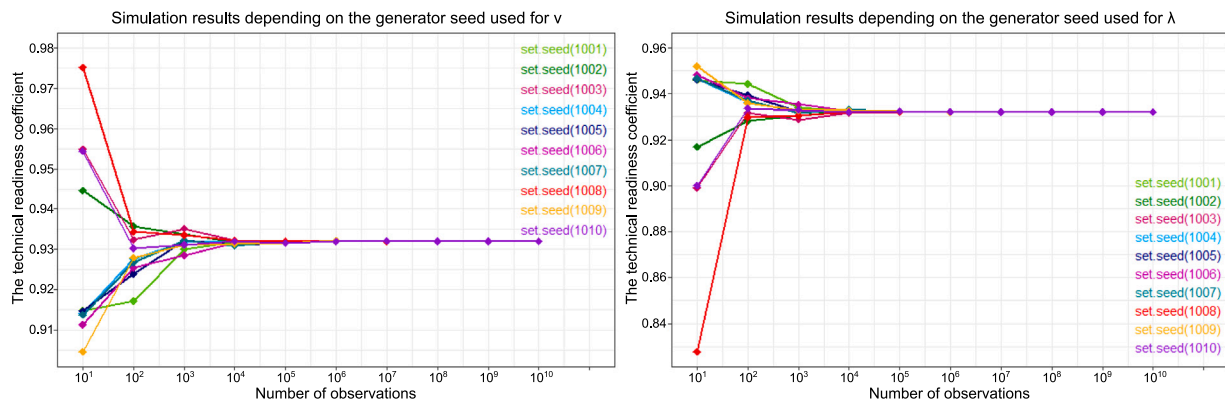


Fig. 12. Simulation results depending on the generator seed used for ν and λ .

Table 9
Results of the simulation.

		Number of observations									
λ	set.seed(1000)	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}
		Values of the technical readiness coefficient (%)									
ν	set.seed(1001)	91.4774	91.7204	93.0015	93.1796	93.2014	93.2097	93.2074	93.2071	93.2070	93.2070
ν	set.seed(1002)	94.4605	93.5764	93.3661	93.1719	93.1973	93.2056	93.2026	93.2074	93.2069	93.2069
ν	set.seed(1003)	95.4844	93.2398	93.5159	93.2338	93.1872	93.1976	93.2062	93.2079	93.2079	93.2079
ν	set.seed(1004)	91.4061	92.7667	93.1757	93.2006	93.1829	93.1917	93.2052	93.2065	93.2067	93.2067
ν	set.seed(1005)	91.4701	92.3943	93.2143	93.1145	93.1614	93.1999	93.2040	93.2057	93.2070	93.2070
ν	set.seed(1006)	91.1257	92.5489	92.8562	93.1516	93.1981	93.2035	93.2073	93.2069	93.2070	93.2070
ν	set.seed(1007)	91.3761	92.6796	93.2291	93.0950	93.2040	93.2087	93.2043	93.2070	93.2071	93.2071
ν	set.seed(1008)	97.5112	93.4347	93.3596	93.2180	93.2068	93.2051	93.2051	93.2069	93.2070	93.2070
ν	set.seed(1009)	90.4598	92.7977	93.1222	93.1384	93.1674	93.2150	93.2073	93.2070	93.2068	93.2068
ν	set.seed(1010)	95.4333	93.0291	93.1166	93.1965	93.1587	93.1937	93.2073	93.2066	93.2068	93.2068
λ	set.seed(1001)	94.6059	94.4424	93.4065	93.2338	93.2121	93.2038	93.2062	93.2064	93.2065	93.2065
λ	set.seed(1002)	91.6942	92.8175	93.0439	93.2415	93.2162	93.2079	93.2110	93.2062	93.2067	93.2067
λ	set.seed(1003)	89.9019	93.1736	92.8840	93.1796	93.2263	93.2160	93.2074	93.2056	93.2067	93.2067
λ	set.seed(1004)	94.6522	93.6219	93.2377	93.2130	93.2306	93.2218	93.2084	93.2070	93.2069	93.2069
λ	set.seed(1005)	94.6107	93.9382	93.1992	93.2979	93.2518	93.2136	93.2096	93.2079	93.2066	93.2066
λ	set.seed(1006)	94.8275	93.8104	93.5414	93.2615	93.2155	93.2100	93.2063	93.2067	93.2066	93.2066
λ	set.seed(1007)	94.6715	93.6985	93.1844	93.3169	93.2095	93.2049	93.2093	93.2065	93.2065	93.2065
λ	set.seed(1008)	82.7729	92.9715	93.0507	93.1955	93.2068	93.2084	93.2085	93.2067	93.2066	93.2066
λ	set.seed(1009)	95.2047	93.5942	93.2904	93.2745	93.2459	93.1985	93.2062	93.2065	93.2067	93.2067
λ	set.seed(1010)	90.0085	93.3803	93.2959	93.2170	93.2545	93.2199	93.2062	93.2069	93.2067	93.2067

was devised in this article. Both functional and numerical reliability characteristics of the vehicle fleet considered were determined. In Borucka, Niewczas, and Hasilova (2019), the vehicle exploitation process was modelled using a semi-Markov process based on three exploitability states. In the present study, the application of the Laplace transform allowed reliability measures to be determined without specifying individual exploitability states. Pearson's test of goodness of fit was used to verify the hypotheses regarding the type of distribution of the random variables under consideration, while in Borucka et al. (2019), the Kolmogorov–Smirnov test and the Akaike information criterion were used. The technical readiness coefficient in Borucka et al. (2019) was equal to 95.0(%) for the tested vehicle sample consisting of police cars whereas the same coefficient for the sample tested in the present study was equal to 93.2(%). A high technical readiness coefficient is typical of vehicles used in rescue systems, which are characterised by randomly occurring transport tasks.

The readiness of trucks carrying out transport tasks in the European Union, Scandinavian countries and Russia was considered in Czarnowska and Migawa (2013). As in Borucka et al. (2019), the authors specified the exploitability states of the vehicles but initially defined 12 states, which they then aggregated into one of two sets, i.e. states of readiness and states of unavailability. Similar to our considerations, the method of modelling the exploitation process of means of transport proposed by the authors (Czarnowska & Migawa, 2013) was based on two random variables concerning the operating time and repair time of the vehicles tested. Technical readiness coefficients were calculated individually for each of the 16 technical objects considered, while the technical readiness coefficient calculated in our research referred to the entire transport system consisting of 25 vehicles. In the literature, there is no objective division of technical objects into elements and systems, and therefore the basis for determining whether a given object is considered as a system or a system is considered as a set of objects is the mathematical model constructed. Reliability analysis makes it possible to determine the relationship between the reliability of individual system components and the reliability of the entire system.

The issue of transport system reliability in the context of assessing the quality of bus services was considered in Moosavi, Yuen et al. (2020). The authors emphasised the importance of the problem from the points of view of both suppliers and users of public transport. To identify the main causes of the failure of transport services, a simulation model was developed and then implemented in RStudio. The main reasons for the unreliability of transport services include passenger demand variations, terminal departure deviations, dwell time variations and headway variations. Programming languages and tools enabling the visualisation of results based on incoming data streams are increasingly used to assess the reliability of various technical objects. One such tool is RStudio, the capabilities of which are presented in this article, similar to Moosavi, Yuen et al. (2020). However, the aim of the research conducted in this publication was to develop a source code in RStudio for an algorithm that would enable the determination of the technical readiness coefficient of means of transport, not to determine the most common causes of failure of the vehicles tested.

7. Conclusions

Methods for modelling the exploitation processes of technical objects have a wide range of applications and thus are the subject of research interest in the fields of reliability theory, decision-making theory, operational research, statistical analysis and simulation modelling, among others. The review of the literature revealed that there is no comprehensive and universal method of modelling the process of exploiting means of transport in terms of their technical readiness using the Laplace transform and the R programming language. Moreover, many models of the means of transport exploitation process developed thus far do not take into account the assumptions concerning the

probability distributions of the random variables under consideration, which is of key importance when choosing an appropriate method of conduct.

Computer software and programming languages are increasingly used in the reliability analysis of technical objects. Computer software not only ensures the correct operation of the system analysed but also supports the decision-making process by quickly interpreting incoming data streams. When using programming languages, the basis for writing an effective code is the equations obtained as a result of theoretical considerations. Therefore, it is very important to understand these considerations thoroughly and properly translate them into the programming language. Accordingly, the aim of this article was to develop an innovative solution in the form of an algorithm that enables the determination of the technical readiness coefficient for any objects using the R programming language and the Laplace transform.

To verify the hypothesis regarding the compliance of the empirical distribution with the exponential distribution, Pearson's test of goodness of fit was used with a significance level of $\alpha = 0.05$. For each of the random variables considered, one distribution parameter was estimated. The analysis revealed that the automatic invocation of the χ^2 test in RStudio does not take into account the assumption regarding the number of estimated parameters of the distribution, resulting in an incorrect assumption of the number of degrees of freedom. The algorithm developed in this article eliminates the possibility of this type of error.

The analysis showed that the value of the λ probability distribution parameter and the limiting value of the renewal density were very similar, thus providing additional confirmation of the correctness of the verification decisions regarding the type of the operating time distribution. The proposed algorithm provides a graphical presentation intensity of the failure function, which is particularly important when planning the production of spare parts, determining the optimal durability of technical objects, and appropriately equipping maintenance facilities with the necessary tools and spare parts.

The calculated technical readiness coefficient was 93.21(%), which proves that the exploitation process of the available fleet of vehicles was correctly organised. The reduction of the technical readiness coefficient was significantly influenced by the untimeliness of the supply of necessary spare parts, which significantly extended the renewal time of the means of transport labelled with numbers 9 and 23. Analysing the technical readiness coefficient enables rational control of the exploitation of means of transport while ensuring the execution of set transportation tasks.

The algorithm developed in this study also enables the visualisation of the course of the expected number of failures and the expected number of renewals depending on time, which was the basis for determining the stationary unavailability coefficient which for the means of transport considered was 6.79(%). The proposed algorithm also enables model sensitivity analysis depending on the values of the distribution parameters of the random variables under consideration.

The universality of the solution proposed in the form of an algorithm enables the determination of reliability characteristics for any technical objects that are the subject of research by other authors. The R programming language is based on the General Public License GNU and therefore is generally available without the need to pay licence fees. Implementation of the solution for modelling the readiness of any technical objects developed requires only the installation of an additional RStudio editor (version 1.4.1106), which is also available free of charge.

The technical readiness of a system can be increased by introducing redundancy, i.e. additional measures or possibilities that are necessary to perform the set of tasks. However, redundancy should be rationally planned, as not all redundancy decisions increase system reliability and, moreover, redundancy often incurs additional costs. The aim of the rational control of the exploitation process of technical objects is to minimise the expected operating costs of the objects while ensuring an

appropriate (required) level of readiness. Planning system redundancy is an optimisation problem in which it is very important to know the readiness and operating coefficients of the objects under consideration.

The algorithm proposed in this article is a very helpful free tool enabling the determination of appropriate reliability characteristics in relation to any technical objects. A direction for further research will be the development of an optimal strategy for controlling the exploitation process based on the Monte Carlo method, which would enable the modelling of processes whose course depends on random factors. The unquestionable advantage of the Monte Carlo method is that growing computing power is enabling the solution of increasingly complex decision problems, although the accuracy of the result obtained depends on the pseudo-random number generator used.

CRedit authorship contribution statement

Joanna Szkutnik-Rogoż: Conceptualization, Methodology, Software, Validation, Formal analysis, Investigation, Resources, Data curation, Writing – original draft preparation, Writing – review and editing, Visualisation. **Jerzy Małachowski:** Supervision, Formal analysis, Funding acquisition, Project administration, Writing – review and editing. **Jarosław Ziołkowski:** Data curation.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Data availability

No data was used for the research described in the article.

Funding

This work was supported by Military University of Technology (grant number 771/2022).

Appendix A

$$\lambda v = A(s + v + \lambda) + Bs, \tag{47}$$

$$\lambda v = s(A + B) + A(v + \lambda) \Rightarrow \begin{cases} 0 = A + B \\ \lambda v = A(v + \lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = \frac{\lambda v}{v + \lambda}, \\ B = -\frac{\lambda v}{v + \lambda}, \end{matrix} \tag{48}$$

$$\frac{\lambda v}{s(s + v + \lambda)} = \frac{\lambda v}{s} - \frac{\lambda v}{s + v + \lambda}, \tag{49}$$

$$\frac{\lambda v}{s(s + v + \lambda)} = \frac{\lambda v}{v + \lambda} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + v + \lambda} \right]. \tag{50}$$

Appendix B

$$\lambda v = As^2 + Asv + As\lambda + Bs + Bv + B\lambda + Cs^2, \tag{51}$$

$$\lambda v = s^2(A + C) + s(Av + A\lambda + B) + B(v + \lambda)$$

$$A = -\frac{\lambda v}{(v + \lambda)^2},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = A + C \\ 0 = A(v + \lambda) + B \\ \lambda v = B(v + \lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B = \frac{\lambda v}{v + \lambda}, \\ C = \frac{\lambda v}{(v + \lambda)^2}, \end{matrix} \tag{52}$$

$$\frac{\lambda v}{s^2(s + v + \lambda)} = -\frac{\lambda v}{(v + \lambda)^2} s + \frac{\lambda v}{v + \lambda} + \frac{\lambda v}{(v + \lambda)^2}, \tag{53}$$

$$\frac{\lambda v}{s^2(s + v + \lambda)} = \frac{\lambda v}{(v + \lambda)^2} \left[-\frac{1}{s} + \frac{\lambda + v}{s^2} + \frac{1}{s + v + \lambda} \right]. \tag{54}$$

Appendix C

$$\lambda s + \lambda v = As^2 + Asv + As\lambda + Bs + Bv + B\lambda + Cs^2, \tag{55}$$

$$\lambda s + \lambda v = s^2(A + C) + s(Av + A\lambda + B) + B(v + \lambda)$$

$$A = \frac{\lambda^2}{(v + \lambda)^2},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = A + C \\ \lambda = A(v + \lambda) + B \\ \lambda v = B(v + \lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} B = \frac{\lambda v}{v + \lambda}, \\ C = -\frac{\lambda^2}{(v + \lambda)^2}, \end{matrix} \tag{56}$$

$$\frac{\lambda(s + v)}{s^2(s + v + \lambda)} = \frac{\lambda^2}{(v + \lambda)^2} s + \frac{\lambda v}{v + \lambda} - \frac{\lambda^2}{(v + \lambda)^2}, \tag{57}$$

$$\frac{\lambda(s + v)}{s^2(s + v + \lambda)} = \frac{\lambda}{(v + \lambda)^2} \left[\frac{\lambda}{s} + \frac{v(\lambda + v)}{s^2} - \frac{\lambda}{s + v + \lambda} \right]. \tag{58}$$

Appendix D

$$s + v = As + Av + A\lambda + Bs, \tag{59}$$

$$s + v = s(A + B) + A(v + \lambda) \Rightarrow \begin{cases} 1 = A + B \\ v = A(v + \lambda) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = \frac{v}{v + \lambda}, \\ B = \frac{\lambda}{v + \lambda}, \end{matrix} \tag{60}$$

$$\frac{s + v}{s(s + v + \lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + v + \lambda}, \tag{61}$$

$$\frac{s + v}{s(s + v + \lambda)} = \frac{1}{v + \lambda} \left[\frac{v}{s} + \frac{\lambda}{s + v + \lambda} \right]. \tag{62}$$

Appendix E

```

1  ### The numerical data necessary to determine
2  the numerical and functional
3  characteristics ###
4  T = c(462725, 22050, 388800, 13480, 41725,
5  56585, 90265, 109480, 128531, 24930,
6  472290, 245630, 145890, 17940, 122850,
7  56180, 224770, 37890, 156280, 45090,
8  7170, 53780, 70420, 277560, 143010,
9  233310, 199370, 380615, 66695, 40213,
10 428130, 281110, 107010, 344610,
11 162690, 375000, 194850)
12 Theta = c(610, 4320, 7170, 2850, 7225, 480,
13 8610, 24440, 18115, 11550, 16830, 16830,
14 2880, 47497, 25900, 450, 24010, 4345,
15 5400, 1470, 5820, 90, 3240, 10240,
16 24450, 26033, 2915, 4335, 240, 5612,
17 27295, 4167, 37560, 1470, 16830, 37220,
18 15320)
19
20 ### Estimation of mathematical model
21 parameters ###
22 N1 = length(T)
23 sum_T = sum(T)
24 Tp = sum_T/length(T)

```



```

9      lambda = 1/Tp
10     N2 = length(Theta)
11     sum_Theta = sum(Theta)
12     Tn = sum_Theta/length(Theta)
13     nu = 1/Tn
14
15     ### Class intervals for a histogram and
16     application of the Sturges' rule ###
17     Counts_T = c(8, 10, 5, 5, 5, 4)
18     Probability_pT = c(0.2222, 0.3073, 0.1046,
19     0.1446, 0.1172, 0.1042)
20     chisq.test(x = Counts_T, p = Probability_pT,
21     rescale.p = T)
22     df1 = length(Counts_T)-length(lambda)-1
23     p_value_T = pchisq(0.63083, df1, lower.tail =
24     FALSE)
25     p_value_T
26     Counts_Theta = c(12, 8, 7, 4, 5, 1)
27     Probability_pTheta = c(0.2917, 0.2066,
28     0.2500, 0.1254, 0.0814, 0.0448)
29     chisq.test(x = Counts_Theta, p = Probability_
30     pTheta, rescale.p = T)
31     df2 = length(Counts_Theta)-length(nu)-1
32     p_value_Theta = pchisq(2.3602, df2, lower.
33     tail = FALSE)
34     p_value_Theta
35
36     ### Graphic representation of the probability
37     distribution function ###
38     plot(ecdf(T), main = "The empirical and
39     cumulative distribution function", xlab
40     = "Time (min.)", las = 1, ylab = "F(t)")
41     x = seq(0, 525600, length = 1000)
42     lines(x, pexp(x, lambda), lwd = 2, col = "red
43     ")
44     hist(T, prob = F, main = "Histogram of T",
45     col = "red", breaks = length(Counts_T),
46     xlab = "Time", ylab = "Counts", las = 1,
47     ylim = c(0,25))
48     ks.test(T, "pexp", lambda)
49     plot(ecdf(Theta), main = "The empirical and
50     cumulative distribution function", xlab
51     = "Time (min.)", las = 1, ylab = "G(t)")
52     x = seq(0, 525600, length = 1000)
53     lines(x, pexp(x, nu), lwd = 2, col = "blue")
54     hist(Theta, prob = F, main = "Histogram of
55     Theta", col = "blue", breaks = length(
56     Counts_Theta), xlab = "Time", ylab = "
57     Counts", las = 1, ylim = c(0,25))
58     ks.test(Theta, "pexp", nu)
59
60     ### Determination of the functional and
61     numerical reliability characteristics
62     ###
63
64     ## a) The reliability function R(t)
65     t = seq(from = 0, to = 525600)
66     R = exp(-(lambda*t))
67     plot(R, las=1, col = "red", main = "The
68     reliability function R(t)", xlab = "Time
69     (min.)", ylab = "R(t)", type = "l", lwd
70     = 2)
71     grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
72     lty = 15, lwd = par("lwd"), equilogs =
73     TRUE)
74
75     ## b) The renewal density function h(t)
76     h = ((lambda*nu)/(nu+lambda))* (1-exp(-(lambda
77     +nu)*t))
78
79     plot(h, col = "red", main = "The renewal
80     density function h(t)", xlab = "Time (
81     min.)", ylab = "h(t)", las = 1, ylim = c
82     (0, 0.000006), type = "l", lwd = 2)
83     grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
84     lty = 15, lwd = par("lwd"), equilogs =
85     TRUE)
86
87     ## c) The expected number of renewals H(t)
88     H = ((lambda*nu)/(nu+lambda)^2)*(-1+(lambda+
89     nu)*t+exp(-(lambda+nu)*t))
90     plot(H, col = "red", main = "The expected
91     number of renewals H(t)", xlab = "Time (
92     min.)", ylab = "H(t)", las = 1, ylim = c
93     (0, 3), type = "l", lwd = 2)
94     grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
95     lty = 15, lwd = par("lwd"), equilogs =
96     TRUE)
97
98     ## d) The expected number of failures Hu(t)
99     Hu = ((lambda)/(nu+lambda)^2)*(lambda+nu*(
100    lambda+nu)*t-lambda*exp(-(lambda+nu)*t))
101    plot(Hu, col = "blue", main = "The expected
102    number of failures Hu(t)", xlab = "Time
103    (min.)", ylab = "Hu(t)", las = 1, ylim =
104    c(0, 3), type = "l", lwd = 2)
105    grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
106    lty = 15, lwd = par("lwd"), equilogs =
107    TRUE)
108
109    ## e) The expected number of failures Hu(t)
110    and renewals H(t)
111    plot(H, col = "red", main = "The expected
112    number of failures Hu(t) and renewals H(
113    t)", xlab = "Time (min.)", ylab = "
114    Number of objects (pieces)", las = 1,
115    ylim = c(0, 3), type = "l", lwd = 2)
116    points(Hu, col= "blue", las = 1, type = "l",
117    lwd = 2)
118    grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
119    lty = 15, lwd = par("lwd"), equilogs =
120    TRUE)
121    text(350000, 1, "H(t)", col = "red")
122    arrows(350000, 1.1, 300000, 1.55, col = "
123    black")
124    text(180000, 2, "Hu(t)", col = "blue")
125    arrows(185000, 1.85, 235000, 1.4, col = "
126    black")
127
128    ## f) The readiness function K(t)
129    K = (1/(nu+lambda))* (nu+lambda*exp(-(lambda+
130    nu)*t))
131    plot(K, col = "red", main = "The readiness
132    function K(t)", xlab = "Time (min.)",
133    ylab = "K(t)", las = 1, ylim = c(0.9, 1)
134    , type = "l", lwd = 2)
135    grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
136    lty = 15, lwd = par("lwd"), equilogs =
137    TRUE)
138
139    ## g) The stationary unavailability
140    coefficient Kn(t)
141    Kn = Hu-H
142    plot(Kn, col = "red", main = "The stationary
143    unavailability coefficient Kn(t)", xlab
144    = "Time (min.)", ylab = "Kn(t)", las =
145    1, ylim = c(0, 0.07), type = "l", lwd =
146    2)
147    grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
148    lty = 15, lwd = par("lwd"), equilogs =
149    TRUE)

```

```

82
83   ### Model sensitivity analysis ###
84
85   ## a) The stationary unavailability
86   coefficient Kn(t) for t->5000
87   t1 = seq(from = 0, to = 50000)
88   Kn = (lambda/(nu+lambda))*(1-exp(-(lambda+nu)
89   *t1))
90   plot(Kn, col = "red", main = "The stationary
91   unavailability coefficient Kn(t) for t1"
92   , xlab = "Time (min.)", ylab = "Kn(t)",
93   las = 1, ylim = c(0, 0.07), type = "l",
94   lwd = 2)
95   grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
96   lty = 15, lwd = par("lwd"), equilog =
97   TRUE)
98
99   ## b) The stationary unavailability
100  coefficient Kn(t) for t->500000
101  t2 = seq(from = 0, to = 500000)
102  Kn = (lambda/(nu+lambda))*(1-exp(-(lambda+nu)
103  *t2))
104  plot(Kn, col = "red", main = "The stationary
105  unavailability coefficient Kn(t) for t2"
106  , xlab = "Time (min.)", ylab = "Kn(t)",
107  las = 1, ylim = c(0, 0.07), type = "l",
108  lwd = 2)
109  grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
110  lty = 15, lwd = par("lwd"), equilog =
111  TRUE)
112
113  ## c) The stationary unavailability
114  coefficient Kn(t) for t->5000000
115  t3 = seq(from = 0, to = 5000000)
116  Kn = (lambda/(nu+lambda))*(1-exp(-(lambda+nu)
117  *t3))
118  plot(Kn, col = "red", main = "The stationary
119  unavailability coefficient Kn(t) for t3"
120  , xlab = "Time (min.)", ylab = "Kn(t)",
121  las = 1, ylim = c(0, 0.07), type = "l",
122  lwd = 2)
123  grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
124  lty = 15, lwd = par("lwd"), equilog =
125  TRUE)
126
127  ## d) The technical readiness coefficient Kg(
128  t) for t->5000
129  K = (1/(nu+lambda))*(nu+lambda*exp(-(lambda+
130  nu)*t1))
131  plot(K, col = "red", main = "The technical
132  readiness coefficient Kg(t) for t1",
133  xlab = "Time (min.)", ylab = "Kg(t)",
134  las = 1, ylim = c(0.9, 1), type = "l",
135  lwd = 2)
136  grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
137  lty = 15, lwd = par("lwd"), equilog =
138  TRUE)
139
140  ## e) The technical readiness coefficient Kg(
141  t) for t->50000
142  K = (1/(nu+lambda))*(nu+lambda*exp(-(lambda+
143  nu)*t2))
144  plot(K, col = "red", main = "The technical
145  readiness coefficient Kg(t) for t2",
146  xlab = "Time (min.)", ylab = "Kg(t)",
147  las = 1, ylim = c(0.9, 1), type = "l",
148  lwd = 2)
149  grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
150  lty = 15, lwd = par("lwd"), equilog =
151  TRUE)
152
153  ## f) The technical readiness coefficient Kg(
154  t) for t->5000000
155  K = (1/(nu+lambda))*(nu+lambda*exp(-(lambda+
156  nu)*t3))
157  plot(K, col = "red", main = "The technical
158  readiness coefficient Kg(t) for t3",
159  xlab = "Time (min.)", ylab = "Kg(t)",
160  las = 1, ylim = c(0.9, 1), type = "l",
161  lwd = 2)
162  grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
163  lty = 15, lwd = par("lwd"), equilog =
164  TRUE)
165
166  ## g) The technical readiness coefficient Kg(
167  t) depending on value of parameter
168  lambda
169  K1 = (1/(nu+0.00000394))*(nu+0.00000394*exp
170  (-0.00000394+nu)*t))
171  K2 = (1/(nu+0.00000494))*(nu+0.00000494*exp
172  (-0.00000494+nu)*t))
173  K3 = (1/(nu+0.00000594))*(nu+0.00000594*exp
174  (-0.00000594+nu)*t))
175  K4 = (1/(nu+0.00000694))*(nu+0.00000694*exp
176  (-0.00000694+nu)*t))
177  K5 = (1/(nu+0.00000794))*(nu+0.00000794*exp
178  (-0.00000794+nu)*t))
179  plot(K1, col = "magenta3", xlab = "Time (min
180  .)", ylab = "Kg(t)", las = 1, ylim = c
181  (0.9, 1), type = "l", lwd = 2)
182  grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
183  lty = 15, lwd = par("lwd"), equilog =
184  TRUE)
185  points(K1, col = "magenta3", las = 1, type =
186  "l", lwd = 2)
187  points(K2, col = "orange", las = 1, type = "l
188  ", lwd = 2)
189  points(K3, col = "red", las = 1, type = "l",
190  lwd = 2)
191  points(K4, col = "green4", las = 1, type = "l
192  ", lwd = 2)
193  points(K5, col = "deepskyblue", las = 1, type
194  = "l", lwd = 2)
195  legend("topright", c("Kg1", "Kg2", "Kg3", "
196  Kg4", "Kg5"), col = c("magenta3", "
197  orange", "red", "green4", "deepskyblue")
198  , lwd = 2, pch = c(15, 16, 17, 18, 19))
199
200  ## h) The stationary unavailability
201  coefficient Kn(t) depending on value of
202  parameter lambda
203  Kn1 = (0.00000394/(nu+0.00000394))*(1-exp
204  (-0.00000394+nu)*t))
205  Kn2 = (0.00000494/(nu+0.00000494))*(1-exp
206  (-0.00000494+nu)*t))
207  Kn3 = (0.00000594/(nu+0.00000594))*(1-exp
208  (-0.00000594+nu)*t))
209  Kn4 = (0.00000694/(nu+0.00000694))*(1-exp
210  (-0.00000694+nu)*t))
211  Kn5 = (0.00000794/(nu+0.00000794))*(1-exp
212  (-0.00000794+nu)*t))
213  plot(K1, col = "magenta3", xlab = "Time (min
214  .)", ylab = "Kn(t)", las = 1, ylim = c
215  (0, 0.1), type = "l", lwd = 2)
216  grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40",
217  lty = 15, lwd = par("lwd"), equilog =
218  TRUE)
219  points(Kn1, col = "magenta3", las = 1, type =
220  "l", lwd = 2)
221  points(Kn2, col = "orange", las = 1, type = "
222  l", lwd = 2)

```

```

143 points(Kn3, col = "red", las = 1, type = "l",
144         lwd = 2)
145 points(Kn4, col = "green4", las = 1, type = "
146         l", lwd = 2)
147 points(Kn5, col = "deepskyblue", las = 1,
148         type = "l", lwd = 2)
149 legend("bottomright", c("Kn1", "Kn2", "Kn3",
150         "Kn4", "Kn5"), col = c("magenta3", "
151         orange", "red", "green4", "deepskyblue")
152         , lwd = 2, pch = c(15, 16, 17, 18, 19))
153
154 ## i) The sensitivity analysis of Kg(t)
155 kg1 = c(0.955, 0.934, 0.913, 0.894, 0.875,
156         0.857, 0.839, 0.823, 0.815)
157 kg2 = c(0.964, 0.946, 0.929, 0.913, 0.897,
158         0.881, 0.866, 0.852, 0.846)
159 kg3 = c(0.969, 0.954, 0.940, 0.926, 0.912,
160         0.899, 0.886, 0.873, 0.867)
161 kg4 = c(0.974, 0.961, 0.948, 0.935, 0.923,
162         0.912, 0.900, 0.889, 0.884)
163 kg5 = c(0.977, 0.965, 0.954, 0.943, 0.932,
164         0.922, 0.911, 0.901, 0.897)
165 kg6 = c(0.979, 0.969, 0.959, 0.949, 0.939,
166         0.930, 0.920, 0.911, 0.907)
167 kg7 = c(0.981, 0.972, 0.963, 0.954, 0.945,
168         0.936, 0.927, 0.919, 0.915)
169 kg8 = c(0.983, 0.974, 0.966, 0.958, 0.949,
170         0.941, 0.934, 0.926, 0.922)
171 kg9 = c(0.984, 0.976, 0.969, 0.961, 0.953,
172         0.946, 0.939, 0.931, 0.928)
173 x = c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
174 plot(x, kg1, main = "The sensitivity
175         analysis of Kg(t)", las = 1, col = "
176         chartreuse3", xlab = "lambda", ylab = "
177         Kg", type = "b", lwd = 2, xlim = c(0.5,
178         10.5), ylim = c(0.8, 1))
179 axis(1, at = 0:9, labels = TRUE)
180 points(kg1, col = "chartreuse3", las = 1,
181         type = "b", lwd = 2, pch = 19)
182 points(kg2, col = "darkgoldenrod2", las = 1,
183         type = "b", lwd = 2, pch = 19)
184 points(kg3, col = "deeppink", las = 1, type =
185         "b", lwd = 2, pch = 19)
186 points(kg4, col = "deepskyblue", las = 1,
187         type = "b", lwd = 2, pch = 19)
188 points(kg5, col = "navyblue", las = 1, type =
189         "b", lwd = 2, pch = 19)
190 points(kg6, col = "lawngreen", las = 1, type
191         = "b", lwd = 2, pch = 19)
192 points(kg7, col = "magenta3", las = 1, type =
193         "b", lwd = 2, pch = 19)
194 points(kg8, col = "cyan4", las = 1, type = "b
195         ", lwd = 2, pch = 19)
196 points(kg9, col = "red", las = 1, type = "b",
197         lwd = 2, pch = 19)
198 grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "black", lty
199         = 15, lwd = par("lwd"), equilog = TRUE
200         )
201 legend("topright", c("Kg1", "Kg2", "Kg3", "
202         Kg4", "Kg5", "Kg6", "Kg7", "Kg8", "Kg9")
203         , col = c("chartreuse3", "darkgoldenrod2
204         ", "deeppink3", "deepskyblue", "navyblue
205         ", "lawngreen", "magenta3", "cyan4", "
206         red"), lwd = 2, pch = 19)
207
208 ## j) The sensitivity analysis of Kn(t)
209 kn1 = c(0.045, 0.066, 0.087, 0.106, 0.125,
210         0.143, 0.161, 0.177, 0.185)
211 kn2 = c(0.036, 0.054, 0.071, 0.087, 0.103,
212         0.119, 0.134, 0.148, 0.154)
213 kn3 = c(0.031, 0.046, 0.060, 0.074, 0.088,
214         0.101, 0.114, 0.127, 0.133)
215 kn4 = c(0.026, 0.039, 0.052, 0.065, 0.077,
216         0.088, 0.100, 0.111, 0.116)
217 kn5 = c(0.023, 0.035, 0.046, 0.057, 0.068,
218         0.078, 0.089, 0.099, 0.103)
219 kn6 = c(0.021, 0.031, 0.041, 0.051, 0.061,
220         0.070, 0.080, 0.089, 0.093)
221 kn7 = c(0.019, 0.028, 0.037, 0.046, 0.055,
222         0.064, 0.073, 0.081, 0.085)
223 kn8 = c(0.017, 0.026, 0.034, 0.042, 0.051,
224         0.059, 0.066, 0.074, 0.078)
225 kn9 = c(0.016, 0.024, 0.031, 0.039, 0.047,
226         0.054, 0.061, 0.069, 0.072)
227 x=c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
228 plot(x, kn1, main = "The sensitivity analysis
229         of Kn(t)", las = 1, col = "chartreuse3"
230         , xlab = "lambda", ylab = "Kn", type = "
231         b", lwd = 2, xlim = c(0.5, 10.5), ylim =
232         c(0, 0.2))
233 axis(1, at = 0:9, labels = TRUE)
234 points(kn1, col = "chartreuse3", las = 1,
235         type = "b", lwd = 2, pch = 19)
236 points(kn2, col = "darkgoldenrod2", las = 1,
237         type = "b", lwd = 2, pch = 19)
238 points(kn3, col = "deeppink3", las = 1, type =
239         "b", lwd = 2, pch = 19)
240 points(kn4, col = "deepskyblue", las = 1,
241         type = "b", lwd = 2, pch = 19)
242 points(kn5, col = "navyblue", las = 1, type =
243         "b", lwd = 2, pch = 19)
244 points(kn6, col = "lawngreen", las = 1, type
245         = "b", lwd = 2, pch = 19)
246 points(kn7, col = "magenta3", las = 1, type =
247         "b", lwd = 2, pch = 19)
248 points(kn8, col = "cyan4", las = 1, type = "b
249         ", lwd = 2, pch = 19)
250 points(kn9, col = "red", las = 1, type = "b",
251         lwd = 2, pch = 19)
252 grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "black", lty
253         = 15, lwd = par("lwd"), equilog = TRUE
254         )
255 legend("bottomright", c("Kn1", "Kn2", "Kn3",
256         "Kn4", "Kn5", "Kn6", "Kn7", "Kn8", "Kn9"
257         ), col = c("chartreuse3", "
258         darkgoldenrod2", "deeppink3", "
259         deepskyblue", "navyblue", "lawngreen", "
260         magenta3", "cyan4", "red"), lwd = 2, pch
261         = 19)
262
263 ### Determination of the functional
264         reliability characteristics depending on
265         the time horizon and model parameters
266         ###
267 t = seq(from = 0, to = 525600) ## the time
268         horizon
269 p_l = 0.00000594 ## p_l := parameter_lambda
270 p_n = 0.0000815 ## p_n := parameter_nu
271 for (i in length(t)) {
272     reliability_function = exp(-p_l*t) ## The
273         reliability function R(t)
274     plot(reliability_function, las=1, col = "
275         green4", main = "The reliability
276         function R(t)", xlab = "Time (min.)"
277         , ylab = "R(t)", type = "l", lwd =
278         2)
279     grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40"
280         , lty = 15, lwd = par("lwd"),
281         equilog = TRUE)

```



```

206 h_function = ((p_l*p_n)/(p_n+p_l))*(1-exp
      (-p_l+p_n*t)) ## The renewal
      density function h(t)
207 plot(h_function, col = "green4", main = "
      The renewal density function h(t)",
      xlab = "Time (min.)", ylab = "h(t)",
      las = 1, ylim = c(0, 0.000006),
      type = "l", lwd = 2)
208 grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40"
      , lty = 15, lwd = par("lwd"),
      equilogs = TRUE)
209 H_function = ((p_l*p_n)/(p_n+p_l)^2)*
      (-1+(p_l+p_n)*t+exp(-(p_l+p_n)*t)) #
      # The expected number of renewals H(
      t)
210 plot(H_function, col = "green4", main = "
      The expected number of renewals H(t)
      ", xlab = "Time (min.)", ylab = "H(t)
      )", las = 1, ylim = c(0, 3), type =
      "l", lwd = 2)
211 grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40"
      , lty = 15, lwd = par("lwd"),
      equilogs = TRUE)
212 Hu_function = ((p_l)/(p_n+p_l)^2)*(p_l+p_
      n*(p_l+p_n)*t-p_l*exp(-(p_l+p_n)*t))
      ## The expected number of failures
      Hu(t)
213 plot(Hu_function, col = "magenta3", main = "
      The expected number of failures
      Hu(t)", xlab = "Time (min.)", ylab =
      "Hu(t)", las = 1, ylim = c(0, 3),
      type = "l", lwd = 2)
214 grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40"
      , lty = 15, lwd = par("lwd"),
      equilogs = TRUE)
215 K_function = (1/(p_n+p_l))*(p_n+p_l*exp
      (-p_l+p_n*t)) ## The readiness
      function K(t)
216 plot(K_function, col = "green4", main = "
      The readiness function K(t)", xlab =
      "Time (min.)", ylab = "K(t)", las =
      1, ylim = c(0.9, 1), type = "l",
      lwd = 2)
217 grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40"
      , lty = 15, lwd = par("lwd"),
      equilogs = TRUE)
218 Kn_function = Hu_function-H_function ##
      The stationary unavailability
      coefficient Kn(t)
219 plot(Kn_function, col = "green4", main = "
      The stationary unavailability
      coefficient Kn(t)", xlab = "Time (
      min.)", ylab = "Kn(t)", las = 1,
      ylim = c(0, 0.07), type = "l", lwd =
      2)
220 grid(nx = NULL, ny = NULL, col = "grey40"
      , lty = 15, lwd = par("lwd"),
      equilogs = TRUE)}

```

References

- Adjetej-Bahun, K., Birregah, B., Châtelet, E., & Planchet, J. (2016). A model to quantify the resilience of mass railway transportation systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 153, 1–14, URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832016300059>, CrossRef.
- Ahmadi, H. (2019). Probabilistic analysis of the DoB in axially-loaded tubular KT-joints of offshore structures. *Applied Ocean Research*, 87, 64–80, CrossRef.
- Ahmed, S., & Dey, K. (2020). Resilience modeling concepts in transportation systems: a comprehensive review based on mode, and modeling techniques. *Journal of Infrastructure Preservation and Resilience*, 1(8), Article 8, URL: <https://doi.org/10.1186/s43065-020-00008-9>, CrossRef.
- Asadabadi, A., & Miller-Hooks, E. (2018). Co-opetition in enhancing global port network resiliency: A multi-leader, common-follower game theoretic approach. *Transportation Research, Part B (Methodological)*, 108, 281–298, URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0191261517307555>, CrossRef.
- Bai, J., Chang, X., Trivedi, K., & Han, Z. (2021). Resilience-driven quantitative analysis of vehicle platooning service. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 70(6), 5378–5389, CrossRef.
- Bai, S., Jia, X., Cheng, Z., Guo, B., Zhao, Q., & Zhang, X. (2022). Operation optimization model for warm standby system based on nonperiodic and imperfect multiple active switching policy. *Computers & Industrial Engineering*, 167, Article 108001, CrossRef.
- Barabino, B., & Di Francesco, M. (2021). Diagnosis of irregularity sources by automatic vehicle location data. *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine*, 13(2), 152–165, CrossRef.
- Barlow, R., & Proschan, F. (1987). *Mathematical theory of reliability*. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Barraza, J., Valdez, F., Melin, P., & Gonzalez, C. (2020). Optimal number of clusters finding using the fireworks algorithm. *Studies in Computational Intelligence*, 827, 83–93, CrossRef.
- Bhattacharyya, D., Khan, R., & Mitra, M. (2021). Two-sample nonparametric test for comparing mean time to failure functions in age replacement. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 212, 34–44, CrossRef.
- Biecek, P. (2017). *Guidebook of R package (4th ed.)*. Wrocław, Poland: Academic publishing GIS.
- Birolini, A. (2017). *Reliability engineering: Theory and practice (8th ed.)*. Berlin, Germany: Springer, CrossRef.
- Borucka, A., Niewczas, A., & Hasilova, K. (2019). Forecasting the readiness of special vehicles using the semi-Markov model. *Maintenance and Reliability*, 21(4), 662–669, CrossRef.
- Bougofa, M., Taleb-Berrouane, M., Bouafia, A., Baziz, A., Kharzi, R., & Bellaouar, A. (2021). Dynamic availability analysis using dynamic Bayesian and evidential networks. *Process Safety and Environmental Protection*, 153, 486–499, CrossRef.
- Cekyay, B., & Ozekici, S. (2010). Mean time to failure and availability of semi-Markov missions with maximal repair. *European Journal of Operational Research*, 207(3), 1442–1454, CrossRef.
- Chang, P.-C. (2022). Theory and applications of an integrated model for capacitated-flow network reliability analysis. *Computers & Industrial Engineering*, 164, Article 107877, CrossRef.
- Chow, A., Su, Z., Liang, E., & Zhong, R. (2021). Adaptive signal control for bus service reliability with connected vehicle technology via reinforcement learning. *Transportation Research Part C (Emerging Technologies)*, 129, Article 103264, CrossRef.
- Cui, L., Chen, J., & Li, X. (2019). Balanced reliability systems under Markov processes. *IIEE Transactions*, 51(9), 1025–1035, CrossRef.
- Cui, L., Chen, J., & Wu, B. (2017). New interval availability indexes for Markov repairable systems. *Reliability Engineering & System Safety*, 168, 12–17, CrossRef.
- Cui, L., Du, S., & Zhang, A. (2014). Reliability measures for two-part partition of states for aggregated Markov repairable systems. *Annals of Operations Research*, 212(1), 93–114, CrossRef.
- Czarnowska, M., & Migawa, K. (2013). Analysis of the availability of trucks operated in the system of international road transport. *Developments in Mechanical Engineering*, 2(1), 5–13, URL: <http://yadda.icm.edu.pl/baztech/element/bwmeta1.element/baztech-2ccf70cb-f236-4084-bed7-d90f7198a63f>.
- Duran, O., Aguilar, J., Capaldo, A., & Arata, A. (2021). Fleet resilience: evaluating maintenance strategies in critical equipment. *Applied Sciences (Switzerland)*, 11(1), 1–17, CrossRef.
- Elshoubari, E., & Shaeer, Z. (2021). Performance study of a complex system with three subsystems in series configuration using reduction method and copula distribution. *International Journal of Computational Intelligence in Control*, 13(2), 19–28.
- Faldzinski, M., Osinska, M., & Zalewski, W. (2021). Extreme value theory in application to delivery delays. *Entropy*, 23(7), 788, CrossRef.
- Fang, C., & Cui, L. (2021). Reliability evaluation for balanced systems with auto-balancing mechanisms. *Reliability Engineering & System Safety*, 213, Article 107780, CrossRef.
- Farshid, N., Mohammad, M., & Mohammad, R. (2022). Probabilistic optimization of preventive maintenance inspection rates by considering correlations among maintenance costs, duration, and states transition probabilities. *Computers & Industrial Engineering*, 173(2022), Article 108619, CrossRef.
- Fernandez, A. (2022). Planning reliability demonstration tests with limited expected risks. *Computers & Industrial Engineering*, 165(2022), Article 107918, CrossRef.
- Finkelstein, M., & Zardudnij, V. (2002). Laplace-transforms and fast-repair approximations for multiple availability and its generalizations. *IEEE Transactions on Reliability*, 51(2), 168–176, CrossRef.
- Ghader, S., Darzi, A., & Zhang, L. (2019). Modeling effects of travel time reliability on mode choice using cumulative prospect theory. *Transportation Research Part C (Emerging Technologies)*, 108, 245–254, CrossRef.
- Gorecki, T. (2011). *Fundamentals of statistics with examples in R*. Legionowo, Poland: Publishing house BTC.
- Gu, Y., Fu, X., Liu, Z., Xu, X., & Chen, A. (2020). Performance of transportation network under perturbations: reliability vulnerability, and resilience. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 133, Article 101809, CrossRef.

- Hayashi, M., & Abe, T. (2011). Efficient reliability approximation method for traffic-path-based network. *IEEE Transactions on Reliability*, 60(2), Article 5754635, [CrossRef](#), 460–469.
- Hogdahl, J., Bohlin, M., & Froidh, O. (2019). A combined simulation–optimization approach for minimizing travel time and delays in railway timetables. *Transportation Research, Part B (Methodological)*, 126, 192–212, [CrossRef](#).
- Hosseini, A., & Pishvaei, M. (2021). Extended computational formulations for tolerance-based sensitivity analysis of uncertain transportation networks. *Expert Systems with Applications*, 183, Article 115252, [CrossRef](#).
- Hua, D., & Elsayed, E. (2016). Reliability estimation of k-out-of-n pairs:G balanced systems with spatially distributed units. *IEEE Transactions on Reliability*, 65(2), Article 7332251, [CrossRef](#), 886–900.
- Ihaka, R., & Gentleman, R. (1996). R: A language for data analysis and graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(3), 299–314, [CrossRef](#).
- Isaac, N., & Saha, A. (2021). Analysis of refueling behavior of hydrogen fuel vehicles through a stochastic model using Markov Chain Process. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 141, Article 110761, [CrossRef](#).
- Jing, Z., Xian, Z., Yanbo, S., & Qingan, Q. (2022). Joint optimization of condition-based maintenance and spares inventory for a series-parallel system with two failure modes. *Computers & Industrial Engineering*, 168(2022), Article 108094, [CrossRef](#).
- Kececioglu, D. (2002). *Reliability engineering handbook* (1st ed.). Lancaster, Pennsylvania, USA: DEStech Publications.
- Lapatin, I., & Nazarov, A. (2021). Output process of the $m|GI|1$ is an asymptotical renewal process. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 21(1), 100–110, [CrossRef](#).
- Li, X., Zhao, X., Pu, W., Chen, P., Liu, F., & He, Z. (2019). Optimal decisions for operations management of BDAR: A military industrial logistics data analytics perspective. *Computers & Industrial Engineering*, 137, Article 106100, [CrossRef](#).
- Liang, S., He, S., Zhang, H., & Ma, M. (2021). Optimal holding time calculation algorithm to improve the reliability of high frequency bus route considering the bus capacity constraint. *Reliability Engineering & System Safety*, 212, Article 107632, [CrossRef](#).
- Malachowski, J., Ziolkowski, J., Legas, A., Oszczypala, M., & Szkutnik-Rogoż, J. (2020). Application of the Bloch-Schmigalla Method to optimize the organization of the process of repairing unmanned ground vehicles. *Advances in Science and Technology. Research Journal*, 14(3), 39–48, [CrossRef](#).
- Miyaguchi, T., Uneyama, T., & Akimoto, T. (2019). Brownian motion with alternately fluctuating diffusivity: Stretched-exponential and power-law relaxation. *Physical Review E*, 100(1), Article 012116, [CrossRef](#).
- Moosavi, S., Ismail, A., & Yuen, C. (2020). Using simulation model as a tool for analyzing bus service reliability and implementing improvement strategies. *PLoS One*, 15(5), Article e0232799, [CrossRef](#).
- Moosavi, S., Yuen, C., Yap, S., & Onn, C. (2020). Simulation-based sensitivity analysis for evaluating factors affecting bus service reliability: A big and smart data implementation. *IEEE Access*, 8, Article 9248996, [CrossRef](#), 201937–201955.
- Nazarov, A., Paul, S., & Gudkova, I. (2017). Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition. In *Proceedings - 31st European conference on modelling and simulation, ECMS 2017* (pp. 687–693). Budapest: [CrossRef](#).
- Nguyen, D., Dijoux, Y., & Fouladirad, M. (2017). Analytical properties of an imperfect repair model and application in preventive maintenance scheduling. *European Journal of Operational Research*, 256(2), 439–453, [CrossRef](#).
- Peng, P., Snyder, L., Lim, A., & Liu, Z. (2011). Reliable logistics networks design with facility disruptions. *Transportation Research, Part B (Methodological)*, 45(8), 1190–1211, [CrossRef](#).
- Pyza, D., Jacyna-Golda, I., & Golda, P. (2019). Problems of deliveries in urban agglomeration distribution systems. *Lecture Notes in Networks and Systems*, 51, 174–183, [CrossRef](#).
- Reza, A., & Amirhossein, S. (2022). A signature-based approach for reliability modeling and maintenance optimization of a coherent system. *Computers & Industrial Engineering*, 171(2022), Article 108465, [CrossRef](#).
- Rykov, V., Ivanova, N., & Kozyrev, D. (2021). Application of decomposable semi-regenerative processes to the study of k-out-of-n systems. *Mathematics*, 9(16), Article 1933, URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/16/1933>, [CrossRef](#).
- Rykov, V., Kozyrev, D., Filimonov, A., & Ivanova, N. (2020). On reliability function of a k-out-of-n system with general repair time distribution. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 35(4), 885–902, [CrossRef](#).
- Samet, S., Chelbi, A., & Hmida, F. (2009). Repairable systems availability optimization under imperfect maintenance. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 57(3), 249–256, [CrossRef](#).
- Stanisz, A. (2006). *Straightforward statistics course with the use of STATISTICA PL on examples from medicine* (3rd ed.). Krakow, Poland: StatSoft Poland.
- Temraz, N. (2021). Analysis and genetic algorithm optimization of a series system with K-out-of-(n + m): G mixed standby subsystems subject to imperfect switching and elapsed repair time. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, 1–19, [CrossRef](#).
- Tucker, E., & Daskin, M. (2022). Pharmaceutical supply chain reliability and effects on drug shortages. *Computers & Industrial Engineering*, 169(2022), Article 108258, [CrossRef](#).
- Tumsekcali, E., Ayyildiz, E., & Taskin, A. (2021). Interval valued intuitionistic fuzzy AHP-WASPAS based public transportation service quality evaluation by a new extension of SERVQUAL model: P-SERVQUAL 4.0. *Expert Systems with Applications*, 186, Article 115757, URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957471421011325>, [CrossRef](#).
- Wan, C., Yang, Z., Zhang, D., Yan, X., & Fan, S. (2018). Resilience in transportation systems: a systematic review and future directions. *Transport Reviews*, 38(4), 479–498, [CrossRef](#).
- Wu, J., Su, L., Li, S., Wang, J., & Chen, X. (2021). Extended dissipative filtering for singularly perturbed systems with random uncertain measurement: A double-layer switching mechanism. *Applied Mathematics and Computation*, 410, Article 126465, [CrossRef](#).
- Xie, F., Castagliola, P., Sun, J., Tang, A., & Hu, X. (2022). A one-sided adaptive truncated exponentially weighted moving average scheme for time between events. *Computers & Industrial Engineering*, 168(2022), Article 108052, [CrossRef](#).
- Xing, L., & Levitin, G. (2018). Connectivity modeling and optimization of linear consecutively connected systems with repairable connecting elements. *European Journal of Operational Research*, 264(2), 732–741, [CrossRef](#).
- Xiong, X., Sha, J., & Jin, L. (2021). Optimizing coordinated vehicle platooning: An analytical approach based on stochastic dynamic programming. *Transportation Research, Part B (Methodological)*, 150, 482–502, [CrossRef](#).
- Yang, D.-Y., & Wu, C.-H. (2021). Evaluation of the availability and reliability of a standby repairable system incorporating imperfect switchovers and working breakdowns. *Reliability Engineering & System Safety*, 207, Article 107366, [CrossRef](#).
- Yeh, C.-T., Lin, Y.-K., Yeng, L. C.-L., & Huang, P.-T. (2021). Reliability evaluation of a multistate railway transportation network from the perspective of a travel agent. *Reliability Engineering & System Safety*, 214, Article 107757, [CrossRef](#).
- Yen, T.-C., Wang, K.-H., & Wu, C.-H. (2020). Reliability-based measure of a retrial machine repair problem with working breakdowns under the F-policy. *Computers & Industrial Engineering*, 150, Article 106885, [CrossRef](#).
- Yeu-Shiang, H., Jyh-Wen, H., & Wei-Yu, K. (2022). Availability and reliability of information transmission for supply chain coordination with demand information sharing. *Computers & Industrial Engineering*, 172(2022), Article 108642, [CrossRef](#).
- Yi, H., Cui, L., & Balakrishnan, N. (2021). New reliability indices for first- and second-order discrete-time aggregated semi-Markov systems with an application to TT & c system. *Reliability Engineering & System Safety*, 215, Article 107882, [CrossRef](#).
- Yi, H., Cui, L., & Shen, J. (2018). Multipoint and multi-interval covering availabilities. *IEEE Transactions on Reliability*, 67(2), 666–677, [CrossRef](#).
- Yujia, W., Rui, K., & Ying, C. (2022). Belief reliability modeling for the two-phase degradation system with a change point under small sample conditions. *Computers & Industrial Engineering*, 173(2022), Article 108697, [CrossRef](#).
- Zhao, X., Wu, C., Wang, S., & Wang, X. (2018). Reliability analysis of multi-state k-out-of-n: G system with common bus performance sharing. *Computers & Industrial Engineering*, 124, 359–369, [CrossRef](#).
- Zio, E. (2009). Reliability engineering: Old problems and new challenges. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(2), 125–141, [CrossRef](#).
- Ziolkowski, J., Malachowski, J., Oszczypala, M., Szkutnik-Rogoż, J., & Legas, A. (2021). Modelling of the military helicopter operation process in terms of readiness. *Defence Science Journal*, 71(5), 602–611, [CrossRef](#).
- Zurek, J., Malachowski, J., Ziolkowski, J., & Szkutnik-Rogoż, J. (2020). Reliability analysis of technical means of transport. *Applied Sciences*, 10(9), Article 3016, [CrossRef](#).
- Zurek, J., Zieja, M., & Ziolkowski, J. (2018). The analysis of the helicopter technical readiness by means of the Markov processes. In *Proceedings IRF2018: 6th international conference integrity-reliability-failure* (pp. 1387–1400). Lisbon: [CrossRef](#).
- Zurek, J., Zieja, M., Ziolkowski, J., & Borucka, A. (2020). Vehicle operation process analysis using the Markov processes. In *Proceedings of the 29th European safety and reliability conference, ESREL 2019* (pp. 2598–2605). Hannover: [CrossRef](#).

Optimization programming tools supporting supply chain management

Joanna SZKUTNIK-ROGOŹ¹  and Jerzy MAŁACHOWSKI² *

¹ Military University of Technology, Cybernetics Faculty, gen. Kaliskiego 2, 00-908 Warsaw, Poland

² Military University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, gen. Kaliskiego 2, 00-908 Warsaw, Poland

Abstract. The issue of transportation is a particular type of mathematical programming that facilitates searching for and determining an optimal distribution network, considering the set of suppliers and recipients. This paper uses a numerical example to present a solution to a transport problem utilizing classical computation methods, i.e., the northwest corner, the least cost in a matrix, and the VAM approximation method. The objective of the paper was to develop tools in the form of algorithms that would then be implemented in three various computing environments (R, GNU Octave, and Matlab) that allow us to optimize transport costs within an assumed supply network. The model involved determining decision variables and indicating limiting conditions. Furthermore, the authors interpreted and visualized the obtained results. The implementation of the proposed solution enables users to determine an optimal transport plan for individually defined criteria.

Key words: mathematical programming; optimization; supply chain.

1. INTRODUCTION

Transport is an integral part of the logistics system. The systematic expansion of military equipment with vehicles that exhibit increased load capacity, capable of moving over varying terrain, as well as the reconstruction and development of the road network clearly indicate the increasing importance of road transport [1]. An innovative optimization method based on objective functions and design constraints for the optimal formation of virtual enterprises was described in [2].

A constraint satisfaction problem, the solution of which facilitates evaluating the behaviours of a system of concurrently interacting cyclic processes was presented in [3]. The current military road transport is used to move not only people and weapons but also all kinds of cargo, over both short and long distances. In times of peace, military cargo freight using road transport is characterized by high stability. Better operational organization of road transport facilitates reducing costs associated with the operation, better arrangement of the cargo space, or limiting the number of people required to implement a task. In turn, during combat operations, intensively volatile tactical situations mean that the established supply route may be changed. In military activity, especially when the time to make a decision is limited, determining an optimal solution requires organizational effort from commanders. The ability to utilize economic theories to solve transport problems for individually defined criteria gains particular importance [4]. The fuel consumption of vehicles powered by internal combustion engines constitutes an essential issue in forming the development trends

of the automotive industry and is an important factor in the economics of transport [5].

The problem of optimizing the delivery time within the assumed distribution network, allowing the company to develop and optimally plan the transport of goods with a short shelf life was considered in [6]. A genetic algorithm to find the control of the reservation limit to minimize maximum regret was proposed in [7]. A new optimization tool that supports supply chain management in the multi-criteria aspect using the genetic algorithm was proposed in [8]. The evaluation of the effectiveness of supply chain management was conducted based on the global function of the criterion. Three examples of actions in favour of transportation issues in a metropolitan area, demonstrating the functional and strategic role of mobility, were proposed in [9]. A probabilistic approach to determining a modal split was described in [10]. Analysis with the use of a logistic regression model was conducted for travel within the Warsaw transport system. In the paper, a new method was developed to find the initial basic feasible solution to the transportation problem using the arithmetic mean [11]. A new modification to Vogel's approximation method was introduced in [12] to find an initial feasible basic solution to the transportation problem. The article [13] proposed a novel Karagul-Sahin approximation method used. The solutions obtained using the proposed method were as good as the solutions using the VAM method.

Due to the development of computer technologies and the growing demand for quantitative IT tools, the market range of operational test methods available has been significantly expanded over recent years [14–17]. Many tools that facilitate the use of programming techniques, loops, and the generation of new user functions are available with the purpose of solving transport problems [18]. The development of technology and

*e-mail: jerzy.malachowski@wat.edu.pl

Manuscript submitted 2022-12-01, revised 2023-02-28, initially accepted for publication 2023-03-22, published in June 2023.

the increasing interest in new mathematical computation methods that facilitate the solution of transport problems affect the rational management of a modern fleet of means of transport. The source literature repeatedly addressed problems related to the reduction of the computational complexity of transportation algorithms using, e.g., the C++ programming language, the Matlab environment, the GNU Octave software, or the R programming language. However, it must be acknowledged that they require the user to have a thorough knowledge of the functions available and be proficient in their use.

1.1. Application of the C++ programming language

A new heuristic total opportunity-cost method to determine the basic feasible solution to the transportation problem was proposed in [19]. In [20], the author analyzed several variants of Vogel's approximation method, taking into account the concept of the total opportunity-cost method. Using the C++ programming language Turbo, it was found that the VAM method combined with the total opportunity-cost method results in an optimal or close to optimal solution. Implementation of the C++ programming language was also described in [21]. Computations show that the Juman & Hoque method in as many as 16 problems considered resulted in a minimum transport cost being determined. In [22], a transportation problem was solved using the row minimum method, the least cost in the matrix, the northwest corner, and the VAM methods. The calculations were conducted using object-oriented programming. Due to the need to execute a number of iterations leading to a solution to the problem in question, the C++ programming language was used. The practical application of C++ to find the optimal solution using the northwest corner rule, the least cost rule, and the Vogel approximation method was presented in [23].

1.2. Application of the Matlab environment

Matlab is a commercial programming language, which facilitates algorithm implementation, matrix manipulations, user interface creation, function plotting, and interfacing with programs developed in other languages. There are many solutions to the transportation problem in the source literature that use the Matlab environment. The problem of transporting chemical substances using the northwest corner method was analyzed in the paper [24]. In [25], the authors proposed a solution based on Vogel's approximation method and the modified distribution method that would facilitate the computation of different numerical problems. In [26], the validity of the use of Matlab software was proven not only due to the reduction of time required to perform the calculations but also due to the high efficiency of the algorithm used. Algorithm descriptions based on the minimum cost method, the northwest corner method, the MODI method, and the VAM method were presented in [27]. The proposed approach emphasizes the dominance of computer programming methods over classical analytical methods. More and more companies have adopted the cost of logistics distribution as one of the important indicators affecting the development of companies [28]. The quantitative analysis, overall analysis, and individual analysis on the supply characteristics of 402 suppliers using Matlab software were conducted in [29].

The use of a program written in Matlab proposed in [30] allows us to effectively manage vehicles and determine an optimal distribution plan within the supply chain.

1.3. Application of GNU Octave

GNU Octave is a free software suite licensed under the General Public License. The learning curve for GNU Octave is quite flat owing to its simple and intuitive syntax, which is largely compatible with Matlab [31]. GNU Octave is a high-level programming language primarily intended for scientific computing, generating new user functions, or executing complex numerical computations. The optimal solution to determine the transportation problem using GNU Octave programming was studied in [32]. The implementation of the proposed solution shortens the calculation algorithm and allows users to determine the optimal distribution plan for material resources for individually determined criteria. The authors of [33] presented the problem of staff allocation and then solved it using GNU Octave. The evaluation criterion was the minimization of worker safety risks. Linear programming is one of the most widely applied optimization models that involve finding efficient algorithms for an optimal solution. It is possible to use linear programming for the minimization of production costs, as well as for the maximization of profits. The application of GNU Octave software to optimize the cost-benefit criterion in production processes was presented in the article [34]. Integer programming using GNU Octave software to solve the complex combinatorial optimization problem was described in [35]. The proposed algorithm facilitated the calculation of feasible schedules in a brief time and cost-benefit analysis of different staffing levels. Various stochastic methods for combinatorial optimization can also be used to support the decision-making process. Stochastic optimization refers to the maximization or minimization of the objective function, in the presence of randomness within the search process. The authors of [36] applied a modified form of the honey bees mating optimization algorithm to design a water distribution network. All computations have been performed in GNU Octave software.

1.4. Application of R

The R programming language allows one to use programming techniques, generate new user functions, or perform complex numerical calculations. In addition, R is a powerful, easy-to-implement, and open-source programming language orientated at data science and analysis. An innovative method based on the particle swarm optimization algorithm was proposed in [37]. The combination of the Markov chain and Bayesian networks method was used to estimate the probability of risk factors associated with the investment strategy. The R programming language was used to solve the problem. Dynamic languages such as R can be used to process large data sets. Using the dynamic language R as an optimization target, the authors of [38] presented an optimization to reduce the memory consumption of R programs. An innovative algorithm for finding the least-cost areal mapping between paths using the R language was described in [39]. The least cost subnetwork was searched using the dynamic programming approach. R has a default-install

set of functionalities that can be easily expanded by the use of several thousand packages as well as user-written scripts. The application of R for the estimation of nonlinear parameters and minimization of essentially smooth functions was discussed in the article [40]. A genetic algorithm to identify the optimal routes for the pairs of seller-customer in the same group was included in [41]. The R programming language was used to test the effectiveness of the proposed algorithm. The travelling salesman problem is one of the combinatorial optimization problems and has wide application in various fields of science and technology. In [42] a new algorithm was proposed to solve the problem of travelling salespeople. The variable neighbourhood search algorithm implemented in R and a stochastic approach to finding the optimal solution were applied. There are many algorithms discussed in the source literature that deal with multi-objective optimization, most of them based on evolutionary techniques. In [43], two analytical examples selected from the literature were used to access the robustness of multi-objective optimization frameworks. The advantage of using a proposed algorithm implemented in the R language was reducing the computational cost of complex optimization tasks.

A conducted source literature review indicates that while the use of modern IT tools and programming languages that enable solving transport problems was the subject matter of many studies, the majority of publications required programming skills, familiarity with available functions, and proficiency in their application. Furthermore, the suggested solution often prevented one from determining the time required to perform computations. As a result, the objective characterized by the originality of this article set by its authors was to develop solutions in the form of scripts implemented in Matlab (ver. R2020b, 64-bit), GNU Octave (ver. 3.4.3, 64-bit), and R (ver. 2022.07.0, 64-bit), which would allow optimizing transport costs within an assumed supply network. The proposed solutions can be easily implemented by users who are not fluent in programming techniques since they eliminate the need to apply loops and user-generated functions. In addition, they not only ensure the determination of an optimal solution to the problem in question but also display the total computation time, which can be crucial when the time to make a decision is limited.

2. MATHEMATICAL MODEL

The optimization problem is also called the mathematical programming problem, and it involves finding the best solution in terms of the adopted decision criterion. The optimization issue can be reduced to searching for a set of permissible solutions, for which the function that represents a specific criterion and is described within this set reaches its extreme. Many linear programming problems can be solved after they are reduced to optimization problems. One of them is a transport problem that involves organizing a distribution network for a certain commodity from established suppliers to known recipients. Each of the recipients places a request and the resources of each supplier are also known. It is also assumed that supply and demand are equal. The problem requires determining the number of goods

from each supplier to each recipient to be delivered so that the total transport cost is as low as possible. The cost of transporting one unit of commodity between suppliers and recipients is known. The total transport cost is equal to the transport cost for all routes. The model adopted the following designations:

$M \in \mathbb{N}_+$ – number of suppliers,

$N \in \mathbb{N}_+$ – number of recipients,

$a_i \in \mathbb{R}_+$ – resource of the i -th supplier, $i = 1, \dots, M$,

$b_j \in \mathbb{R}_+$ – demand of the j -th recipient, $j = 1, \dots, N$,

$C = [c_{ij}]_{M \times N}$, $c_{ij} \in \mathbb{R}_+$ – transport cost for one unit of the commodity from the i -th supplier to the j -th recipient,

$X = [x_{ij}]_{M \times N}$, $x_{ij} \in \mathbb{R}_+^0$ – number of units to be transported from the i -th supplier to the j -th recipient,

$L \in \mathbb{R}_+$ – total transportation cost.

From the perspective of conducted analyses, the mathematical model that presents the essence of the solved problem is based on the following equations and assumptions [32]:

a) each supplier sends as many commodities as there are in its resources

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = a_i, \quad (1)$$

b) each recipient receives as many commodities as requested

$$\sum_{i=1}^M x_{ij} = b_j, \quad (2)$$

c) demand equals supply

$$\sum_{i=1}^M a_i = \sum_{j=1}^N b_j, \quad (3)$$

d) transport cost for one unit of commodity

$$L(X, C) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N x_{ij} c_{ij}, \quad (4)$$

e) the total commodity transport cost is to be as low as possible

$$L(X^*) = \min_X L(X). \quad (5)$$

The transport problem is completely determined by the number of recipients N and suppliers M . Please note that the number of all decision variables in the problem is $M \cdot N$, while the number of constraints is equal to $M + N$. In addition, the decision variables found under limiting conditions are only accompanied by a coefficient of 0 or 1. The balanced transport problem under consideration was solved based on the northwest corner, the least cost in the matrix, and Vogel's approximation (VAM) methods.

3. METHODOLOGY

3.1. The Northwest corner method

The northwest corner method involves searching a transport table and assigning specific values to variables, each time for routes in the left top corner of the cost matrix. In the case of the

problem in question, the authors assumed that transport would be conducted using a general-purpose, large-capacity JELCZ 325 vehicle, for which the unit operating cost index per operating unit is PLN 6. Transport costs were calculated based on Order No. 40 of the Chief of the Armed Forces Support Inspectorate dated 17 February 2020. Numerical data on the route, demand, and costs of transport between suppliers and recipients are listed in Table 1.

Table 1
Data for numerical problem

		Suppliers					Demand
		S1	S2	S3	S4	S5	
Recipients	R1	432	1715	1092	765	1104	46
	R2	858	2246	376	1357	1697	37
	R3	1209	2764	494	1968	2308	53
	R4	1450	938	1968	463	117	49
Supply		36	29	23	42	55	

The transportation model was presented by the network shown in Fig. 1.

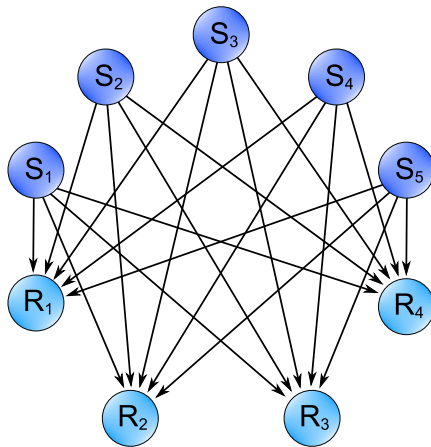


Fig. 1. Network structure of transportation problem

Determining a permissible solution using the northwest corner method involves indicating an element in the left corner of the cost matrix and establishing corresponding supply and demand. The next stage requires selecting the lower value and entering a selected value in the field corresponding to the left corner first cell, as shown in Table 2.

Next, the entered number has to be subtracted from the supply and demand. Then check for which value the 0 was obtained. In a situation where demand takes the zero value, the other fields in a given line should be filled with zeros. The supply in the problem under consideration is 0. A permissible solution presented in Table 3 was determined by following the procedure described in the steps below.

Table 2

Results table for the northwest corner method

		S1	S2	S3	S4	S5
		36	29	23	42	55
R1	46	36				
R2	37					
R3	53					
R4	49					

Table 3

A feasible solution for the northwest corner method

		S1	S2	S3	S4	S5
		0	0	0	0	0
R1	0	36	10	0	0	0
R2	0	0	19	18	0	0
R3	0	0	0	5	42	6
R4	0	0	0	0	0	49

A permissible solution is degenerate when the number of baseline elements (different from zero) is equal to $M + N - 1$. Considering the obtained baseline solution, the sum of products of baseline elements and the corresponding transport costs were determined according to equation (4) in order to calculate transport costs with the northwest corner method. The total transport cost calculated with the northwest corner method is PLN 186 851.

3.2. The least cost in the matrix method

The first step to determine a permissible solution using the least cost method in the matrix is to select the least value among all in the cost matrix. Next, it is necessary to determine the lower value of supply and demand that corresponds to this cell. The results are shown in Table 4.

Table 4

Table of results for the least cost in the matrix method

		S1	S2	S3	S4	S5
		36	29	23	42	55
R1	46					
R2	37					
R3	53					
R4	49					117

The minimum element in the transport cost matrix is 117, with its supply at 55 and demand equal to 49. In the next iteration, both supply and demand were reduced by 49, which led to

0 for demand. This resulted in filling the other field of the fourth line with 0 as well. Table 5 shows the results after applying the presented procedure.

Table 5
Results of the first iteration

		S1	S2	S3	S4	S5
		36	29	23	42	6
R1	46					
R2	37					
R3	53					
R4	0	0	0	0	0	49

Proceeding in an analogous manner, considering the cells filled with 0, resulted in obtaining a degenerate permissible solution. Table 6 illustrates the result of the calculations performed.

Table 6

A feasible solution for the least cost in the matrix method

		S1	S2	S3	S4	S5
		0	0	0	0	0
R1	0	36	0	0	10	0
R2	0	0	0	23	14	0
R3	0	0	29	0	18	6
R4	0	0	0	0	0	49

The obtained permissible solution is also in degenerate form since it has 8 baseline elements. In order to calculate transport costs with the least cost in the matrix method, the authors once again determine the sum of products of baseline elements and costs listed in Table 1, with the result being PLN 186 009. It should be noted that the transport cost calculated with the least cost in the matrix method is lower than the value determined with the northwest corner method, which means that the acceptable solution in Table 6 is better.

3.3. Vogel's approximation method (VAM)

The VAM involves calculating the so-called indices, understood as the difference between the cheapest and second lowest cost in each line and column. Next, an element with the highest value should be determined among the calculated indices. If the highest difference in transport costs corresponds to the column, select the lowest cost in the column in question. If the highest index corresponds to a line, this will require selecting the minimum element in the analyzed line. Table 7 illustrates the result of the calculations performed.

The maximum transport cost difference in the problem in question corresponds to the column and amounts to 987. The

Table 7

The result of computations conducted for the VAM

		S1	S2	S3	S4	S5
		426	777	118	302	987
R1	333	432	1715	1092	765	1104
R2	482	858	2246	376	1357	1697
R3	715	1209	2764	494	1968	2308
R4	346	1450	938	1968	463	117

minimum element in the analyzed column is 117, with a demand of 49 and a supply of 55. The lowest value of the two should be entered in the cell with a cost value of 117, while the entered number should be subtracted from both supply and demand. The 0 obtained for demand leads to the need to fill other cells in the line in question with zeros. The consequences of applied transformations are illustrated in Table 8.

Table 8

Results table for the VAM

		S1	S2	S3	S4	S5
		36	29	23	42	6
R1	46					
R2	37					
R3	53					
R4	0	0	0	0	0	49

Further computations should not include the lines or columns filled with 0. A permissible solution presented in Table 9 was determined by following the procedure described in the following steps.

Table 9

A feasible solution for the VAM

		S1	S2	S3	S4	S5
		0	0	0	0	0
R1	0	0	0	0	40	6
R2	0	6	29	0	2	0
R3	0	30	0	23	0	0
R4	0	0	0	0	0	49

The determined solution has 8 baseline elements; therefore, the requirement with respect to a degenerate permissible solution has been satisfied. The total transport costs calculated as the sum of products of the baseline solution and the costs resulting from Table 1 for the VAM method are PLN 163 585. Table 10 lists the permissible solutions obtained depending on the applied method.

3.4. Karagul–Sahin approximation method

The Karagul–Sahin method is an iterative method consisting of 5 steps:

1. Determine the coefficients $r_{ij} = \frac{b_j}{a_i}$ and $r_{ji} = \frac{a_i}{b_j}$.
2. Determine the matrices:
 - a) weighted A transport costs (i.e., the products r_{ij} and the transport cost matrix),
 - b) weighted B transport costs (i.e., the products r_{ji} and the transport cost matrix).
3. Identify the minimum weighted transportation cost in matrices A and B and then identify the largest possible assignment corresponding to the value of supply or demand on the route (considering the limiting conditions).
4. If all elements of matrices A and B have been analyzed – then the end of the algorithm. Otherwise, return to step 3.
5. Determine the value of the objective function.

Table 10 summarizes the results of the calculations performed.

Table 10

The determined values of the coefficients r_{ij} , r_{ji} and the values of the individual cells of the matrix A and B

r_{ij}	R1	R2	R3	R4
S1	1.28	1.03	1.47	1.36
S2	1.59	1.28	1.83	1.69
S3	2.00	1.61	2.30	2.13
S4	1.10	0.88	1.26	1.17
S5	0.84	0.67	0.96	0.89

Matrix A	R1	R2	R3	R4
S1	552.00	881.83	1779.92	1973.61
S2	2720.34	2865.59	5051.45	1584.90
S3	2184.00	604.87	1138.35	4192.70
S4	837.86	1195.45	2483.43	540.17
S5	923.35	1141.62	2224.07	104.24

r_{ji}	R1	R2	R3	R4
S1	0.78	0.97	0.68	0.73
S2	0.63	0.78	0.55	0.59
S3	0.50	0.62	0.43	0.47
S4	0.91	1.14	0.79	0.86
S5	1.20	1.49	1.04	1.12

Matrix B	R1	R2	R3	R4
S1	338.09	834.81	821.21	1065.31
S2	1081.20	1760.38	1512.38	555.14
S3	546.00	233.73	214.38	923.76
S4	698.48	1540.38	1559.55	396.86
S5	1320.00	2522.57	2395.09	131.33

The first minimum weighted transportation cost in matrix A is the value of 104.24, while in matrix B it is the value of 131.33. The largest possible assignment corresponding to the value of 104.24 is the number 49 and therefore this value was entered into the cell corresponding to the intersection of S5 and R4, as illustrated in Table 11.

Table 11
Table for results

		R1	R2	R3	R4
		46	37	53	49
S1	36				0
S2	29				0
S3	23	0	0	23	0
S4	42				0
S5	55				49

The next minimum weighted transport cost in matrix A is the number 552 while in matrix B it is the number 214.38. The smaller of the two is 214.38 for which the largest possible assignment is the number 23, so this value was entered in the field corresponding to the intersection of cells S3 and R3. Following the procedure presented, the admissible solution presented in Table 12 was obtained.

Table 12

Permissible solution determined by the Karagul–Sahin method

		R1	R2	R3	R4
		46	37	53	49
S1	36	0	6	30	0
S2	29	0	29	0	0
S3	23	0	0	23	0
S4	42	42	0	0	0
S5	55	4	2	0	49

Considering the degenerate baseline solution obtained, the sum of the products of the baseline elements and the corresponding transportation costs was determined according to formula (4) to calculate the transport costs using the Karagul–Sahin method. The total transport cost is PLN 163 587.

3.5. Maximum difference extreme difference method

The following steps can be detailed in the maximum difference method [44]:

1. Determine the difference between the two largest values in each row of the cost matrix.
2. Determine the difference between the maximum and minimum values of the cost in each column of the cost matrix.

3. Identify the maximum among the values calculated in steps 1 and 2 and then find the corresponding minimum transportation cost.
4. If the maximum difference corresponds to two or more cells, then select the cost cell located in the upper left corner of the cost matrix.
 For the indicated cell, find the smaller of the corresponding values of supply and demand, and then reduce demand and supply by the entered value, completing the remaining cells with 0 values, depending on whether 0 was obtained in the row or in the column.
5. Repeat steps 1–4 until all supply and demand cells are equal to 0.
6. Determine the value of the objective function.

Table 13 illustrates the results of applying the described treatment scheme.

Table 13

The result of implementing the method of maximum difference

		R1	R2	R3	R4		
		0	0	0	0		
S1	0	0	6	30	0		
S2	0	0	29	0	0		
S3	0	0	0	23	0		
S4	0	42	0	0	0		
S5	0	4	2	0	49		
Difference values determined for rows (maximum difference)							
241	241	592	–	–	–	–	
518	518	531	531	531	531	2246	
876	–	–	–	–	–	–	
611	611	592	592	–	–	–	
611	611	593	593	593	593	1697	1697
Difference values determined for columns (extreme difference)							
1283	1870	2270	1851				
1283	1388	1555	1333				
1283	1388	–	1333				
950	889	–	821				
611	549	–	821				
611	549	–	–				
–	549	–	–				
	1697						

Taking into account the base solution (the solution is degenerate because the number of base elements is $M + N - 1$), in order to calculate the transport costs by the described method, the sum of the products of the base elements and the corresponding transport costs was determined according to formula (4). The total transportation cost is 163 587 PLN. Table 14 presents a summary of the admissible solutions depending on the method used and a graphical interpretation of the base solutions is presented in Fig. 2.

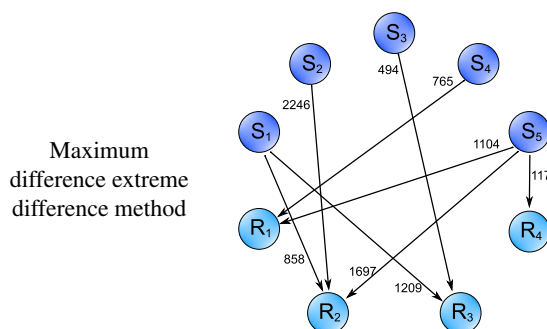
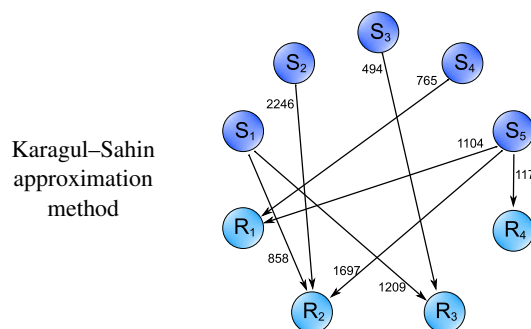
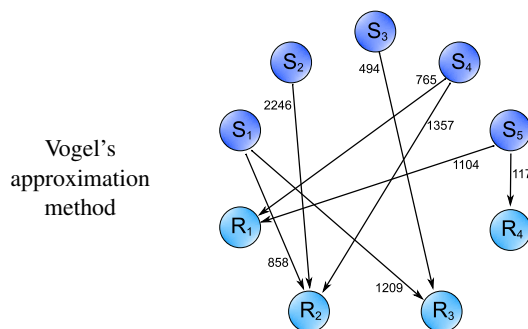
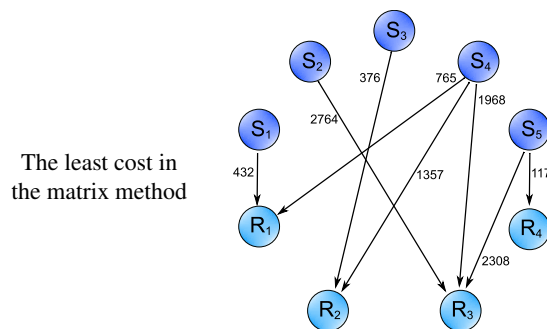
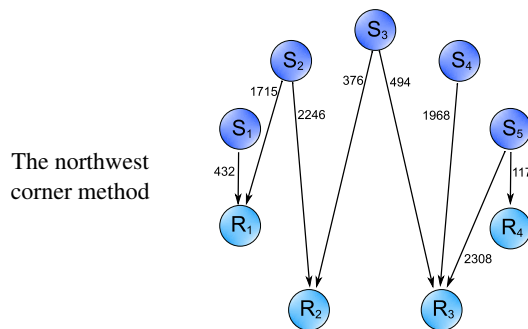


Fig. 2. The graphical interpretation of the base solutions

Table 14
Obtained permissible solutions

		S1	S2	S3	S4	S5
The northwest corner method	R1	0	0	0	40	6
	R2	6	29	0	2	0
	R3	30	0	23	0	0
	R4	0	0	0	0	49
The least cost in the matrix method	R1	36	0	0	10	0
	R2	0	0	23	14	0
	R3	0	29	0	18	6
	R4	0	0	0	0	49
Vogel's approximation method	R1	0	0	0	40	6
	R2	6	29	0	2	0
	R3	30	0	23	0	0
	R4	0	0	0	0	49
Karagul–Sahin approximation method	R1	0	0	0	42	4
	R2	6	29	0	0	2
	R3	30	0	23	0	0
	R4	0	0	0	0	49
Maximum difference extreme difference method	R1	0	0	0	42	4
	R2	6	29	0	0	2
	R3	30	0	23	0	0
	R4	0	0	0	0	49

4. RESULTS

4.1. Optimization of the basic feasible solution (the potential method)

The potential method aims to optimize the permissible solution obtained. Based on the input data and the solution obtained with the northwest corner method, the authors developed a table for the results (i.e., indirect costs), so that the elements corresponding to the supply and demand values remain empty. The transport costs in the cells corresponding to the elements of the baseline solution were filled with the values in Table 1. It was assumed that $Y_1 = 0$. A transport cost equal to 432 corresponds to potential Y_1 . In order to determine potential X_1 , the authors calculated the difference between the cost and potential Y_1 , according to the dependence: $X_1 = 432 - Y_1$. Next, in the line corresponding to potential Y_1 , the authors indicated a next transport cost, which allowed us to determine potential X_2 understood as: $X_2 = 1715 - Y_1$. The other potentials, X_i , where $i = 1, \dots, M$ and Y_j where $j = 1, \dots, N$ were determined similarly. The cells constituting zero elements of the permissible solutions were filled with the sums of potential $X_i + Y_j$. The results of applied transformations are illustrated in Table 15.

Table 16 shows the optimality indices that are the difference between indirect costs and costs arising from Table 1.

Table 15
The results of applied transformations

Indirect costs						
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
432	1715	-155	1319	1659		
432	1715	-155	1319	1659	Y_1	0
963	2246	376	1850	2190	Y_2	531
1081	2364	494	1968	2308	Y_3	649
-1110	173	-1697	-223	117	Y_4	-1542
Transportation costs						
432	1715	1092	765	1104		
858	2246	376	1357	1697		
1209	2764	494	1968	2308		
1450	938	1968	463	117		

Table 16

The values of optimality indices for the northwest corner method

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
432	1715	-155	1319	1659		
0	0	-1247	554	555	Y_1	0
105	0	0	493	493	Y_2	531
-128	-400	0	0	0	Y_3	649
-2560	-765	-3665	-686	0	Y_4	-1542

The presence of positive values among optimality indices means that the obtained permissible solution is not optimal. Obtaining a new solution with a lower transport cost requires building a cycle in such a manner that the maximum optimality index is the first element of a positive cycle. Next, it is required to indicate in the line with the positive cycle element an element having an equivalent in the column. The described procedure should be repeated until the cycle is fully closed. The minimum value among all negative cycle elements should be indicated. Next, the positive cycle elements should be increased and the negative cycle element reduced by this number. Table 17 illustrates the constructed cycle and a new permissible solution.

Table 17

The results of applied transformations

Cycle					New feasible solution				
36	10 (-)	0	0	0 (+)	36	4	0	0	6
0	19 (+)	18 (-)	0	0	0	25	12	0	0
0	0	5 (+)	42	6 (-)	0	0	11	42	0
0	0	0	0	49	0	0	0	0	49

The transport cost in the new baseline (degenerate) solution is lower than initially and amounts to PLN 183 521. A new solution was obtained after repeating the procedure, leading to determining optimality indices and cycle construction five times. Table 18 illustrates the ultimate results and calculated optimization indicators.

Table 18

The new feasible solution and optimization indicators

New feasible solution					Optimization indicators				
0	0	0	40	6	-166	-61	-1541	0	0
6	29	0	2	0	0	0	-233	0	-1
30	0	23	0	0	0	-167	0	-260	-261
0	0	0	0	49	-2171	-271	-3404	-685	0

The fact that all optimality indices are non-positive clearly indicates that the obtained solution is optimal. The entire cargo transport cost is PLN 163 585. The transport costs for each method and the result of the potential method that leads to an optimal solution are presented in Tables 19 and 20.

Table 19

Transport costs for the basic solution

Method	Transport costs for basic solution (PLN)
The northwest corner method	186 851
The least cost in the matrix method	186 009
Vogel's approximation method	163 585
Karagul-Sahin approximation method	163 587
Maximum difference extreme difference method	163 587

When comparing the results obtained, it should be noted that the objective function values for individual permissible solutions vary depending on the selected method. Each of the methods in question satisfied the condition in terms of the permissible solution degeneracy. The northwest corner method, despite the simplicity of the computation, turned out to be the least accurate, since it required applying the potential method five times. In the case of the least cost element in the matrix method, a lower transport cost was determined for the baseline solution than in the northwest corner method, however, it also required fivefold optimization of the permissible solution. The Karagul-Sahin method and the method of maximum differences provided the same admissible solution, which was not optimal because it required applying the method of potentials once. Only the VAM method ensured that a minimum objective function value was obtained, hence, determining an optimal commodity transport plan from the supplier to the recipients already in the first step. The transport costs after subsequent steps of improvement are illustrated in Fig. 3.

Table 20

Comparison of solutions obtained

Transport costs after the next iterations of the potential method (PLN)	Method			
	The northwest corner method	The least cost in the matrix method	Karagul-Sahin approximation method and maximum difference extreme difference method	Vogel's approximation method
1st improvement of the solution	183 521	177 135	163 587	163 585
2nd improvement of the solution	181 305	174 665	163 585	
3rd improvement of the solution	165 969	174 238		
4th improvement of the solution	164 983	164 581		
5th improvement of the solution	163 585	163 585		

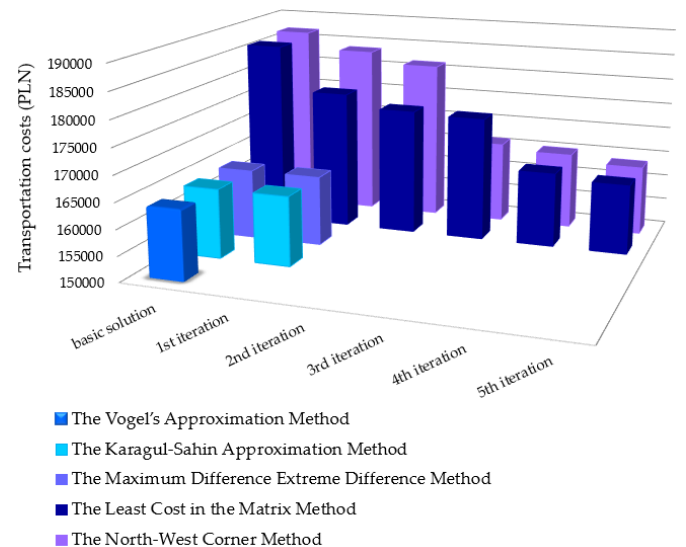


Fig. 3. The transport costs after subsequent steps of improvement

4.2. Reduction of computational complexity of the transportation problem using programming languages

As is well known, the travelling salesman problem is NP-difficult, which means that algorithms with polynomial computational complexity that solve this problem are not known. Therefore, in practical applications, it is necessary to use polynomial approximation algorithms. One possible algorithm is to check the possible Hamiltonian cycles and choose the shortest cycle. The disadvantage of this method is that the number of cycles for an n -vertex graph is $(n-1)!/2$. The problem of computational complexity has been the subject of research by many scientists, who have so far failed to find the best algorithm in

terms of computational complexity. As examples, we can point to the Held–Karp algorithm, which has a complexity of $n^2 2^n$, the nearest neighbour algorithm with a complexity of n^2 , the greedy algorithm with a complexity of $n^2 \log(n)$ or the RNN algorithm (repetitive NN algorithm) with a complexity of n^3 .

4.2.1. Application of the Matlab environment

Considering the reduction in time necessary to perform the enormous calculations, the transport problem can be easily solved using the source code proposed in this article, which has been implemented in the Matlab command window (Appendix A). The R2020b (64-bit) version was used in the computations. The application of the built-in ‘linprog’ function ensured an optimal solution, consistent with the result of the VAM method. The total computation time determined with the ‘tic (); toc’ function was 0.021 s.

4.2.2. Application of the GNU Octave

A source code based on the ‘glpk’ function available in GNU Octave was developed to determine an optimal solution to the transport problem (Appendix B). In turn, determining the computation time was possible due to the application of the ‘tic (); toc’ function, which resulted in an optimal solution obtained after 0.354 s. GNU Octave v.3.4.3 (64-bit) was used in the investigation.

4.2.3. Application of the R

With optimal supply chain management in mind, the last of the solutions proposed in this article was to use the ‘lp.transport’ function called in R (Appendix C). The ‘Sys.time()’ function was used to determine the total computation time. As a result of the conducted analysis, it was concluded that the total time required to determine the optimal solution in R was only 0.013 s. The computations were performed using R v.2022.07.0 (64-bit).

Figure 4 summarizes the total time required to perform the calculations for each of the proposed scripts.

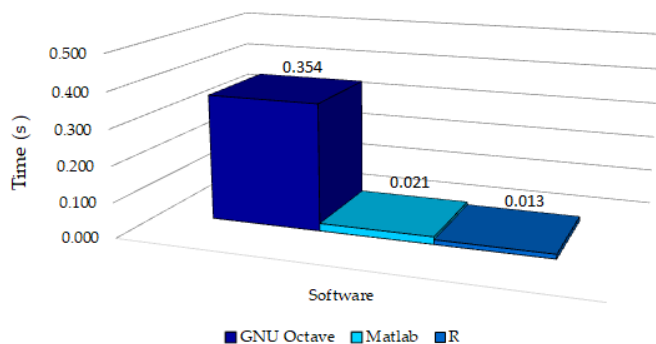


Fig. 4. The total time required to perform the calculations

The longest time of calculations ensuring the determination of an optimal solution to the problem in the questions has been recorded when using GNU Octave. Please note that implementing a script called in Matlab or R significantly reduced the computation time relative to GNU Octave. The fastest solution to

the problem in question, hence, the lowest computation complexity was obtained using R. Table 21 lists similarities and differences resulting from the application of R, GNU Octave, and Matlab.

5. SUMMARY AND CONCLUSIONS

The transport and traffic subsystem are crucial elements of a logistics system. Its main task is to ensure the correct and timely transfer of people and goods. The development of technology and the increasing interest in new mathematical computation methods that allow one to solve transport problems are factors that support rational supply chain management. The application of computer technologies and the growing demand for IT optimization tools were the reason behind expanding the market offer in the field of operational studies over the recent years. Programming languages are increasingly being used to support the decision-making process. It should be stressed that decision-making time may be crucial in supply chain management. As a result, the objective of this article was to develop solutions in the form of scripts implemented in GNU Octave, Matlab and R, which enable minimizing transport costs within supply networks, while minimizing the time required for computations.

The solutions proposed in this publication can be easily implemented by users not fluent in programming techniques, since they eliminate the need to apply loops and user-generated functions. The paper used the north-west corner, the least cost in the matrix and the VAM methods. In turn, the potential method was used to optimize individual baseline solutions. Classical accounting methods were characterised by high computing complexity and, hence, were very time-consuming. The analysis conducted allowed one to determine an optimal solution with a total transport cost of PLN 163 585.0. The north-west corner method and the least cost in the matrix method required a five-fold application of the potential method, while VAM ensured determining an optimal solution in the first step.

To determine the optimal solution to the transport problem, the authors used a built-in ‘glpk’ function within the script implemented in GNU Octave. The total computation time was 0.354 s. However, determining the most favourable transport plan with the use of the Matlab environment involved the application of the ‘linprog’ function, which is an element of the Optimization Toolbox suite that employs the so-called simple-dual algorithm simultaneously solving the current and dual problems. The optimal solution to the problem in question was found after 0.021 s. The last of the proposed scripts has an implemented ‘lp.transport’ function, which was then called in the R environment. As a result of the computations performed, it was concluded that the total time required to determine an optimal solution in R was 0.013 s. The quickest solution to the problem in question, and thus, the lowest computational complexity, was obtained when using R. Furthermore, R, like GNU Octave, is free, unlike the Matlab computing environment, which is commercial. The developed scripts do not enable determining individual permissible solutions resulting from the potential method, while allowing one to determine an optimal

Table 21
Comparison of GNU Octave, Matlab, and R

Number	GNU Octave	Matlab	R
1	Object-oriented programming language	Interactive language, visualization tool, and computing environment	Numerically-oriented programming language
2	Most numerical experiments are compatible with Matlab	Matlab is compatible with GNU Octave but not R	R codes can be integrated with other programming languages
3	Can be used to solve linear and non-linear problems numerically	Can be used to solve linear and non-linear problems numerically	Can be used to simplify complex mathematical problems
4	Can run on Windows, macOS, and Linux	Can run on Windows, macOS, and Linux	Can run on Windows, macOS, and Linux
5	GNU Octave is slower than Matlab	Matlab is faster than GNU Octave	R is faster than Matlab
6	GNU Octave is not a commercial product. GNU Octave is open-source	Matlab is a commercial product of MathWorks	R is not a commercial product. R is open-source
7	GNU Octave offers online support to programmers, as well as providing tutorials, documentation, examples, blog, answers, and community support	Matlab offers online support to programmers, as well as providing tutorials, documentation, examples, blog, answers, and community support	R offers online support to programmers, as well as providing tutorials, documentation, examples, blog, answers, and community support
8	Easy to learn syntax	Easy to learn syntax	Relatively complex syntax
9	GNU Octave is a programming language used for numerical computations	Matlab is a programming language used for technical computations	R is a programming language used for statistical analysis
10	GNU Octave supports graphics for 2D and 3D data visualization	Matlab supports graphics for 2D and 3D data visualization	R supports graphics for 2D and 3D data visualization
11	GNU Octave is not widely used within the industry	Matlab is widely used within the industry	GNU Octave is not widely used within the industry
12	GNU Octave has proper support for auto-increment and assignment operators	Matlab does not have support for auto-increment and assignment operators	R does not have an increment operator in the base language, but it can be implemented in the 'Hmisc' package
13	Empty files can be loaded without any hassle	Empty files cannot be loaded	Empty files can be loaded without any hassle
14	Commands used to print the result on the screen in GNU Octave are 'print' and 'fprintf'	Commands used to print the result on the screen in Matlab is only 'fprintf'	Commands used to print the result on the screen in R are 'print', 'message', and 'cat'
15	It consumes less memory than Matlab	It consumes more memory than GNU Octave	It consumes less memory than GNU Octave
16	It was written in C, C++, and Fortran	It was written in C, C++, and Java	It was written in C, C++, and Fortran

distribution network over a noticeably brief time, which may be crucial when the decision time is limited.

Every programming language has its advantages and disadvantages. R and GNU Octave are both open-source programming languages oriented towards data science and analysis. Anyone can work with R and GNU Octave without any license or fee. Matlab, GNU Octave, and R provide a wide range of applications. GNU Octave is mainly used for numerical computations, Matlab for technical computations, and R for statistical analysis. It should be emphasized that Matlab is compatible with GNU Octave but not with R. The increasing computing power of computers provides the ability to solve in-

creasingly complex decision-making problems. Therefore, further research will be directed at extending the proposed solutions with the possibility of solving multi-criteria decision problems.

APPENDIX A

Application of the Matlab environment

```
tic ()
f = [423; 858; 1209; 1450; 1715; 2246; 2764;
938; 1092; 376; 494; 1968; 765; 1357; 1968; 463;
1104; 1697; 2308; 117]; % A matrix containing
```



```

the objective function coefficients
(the transport costs)
A=[]; % Linear inequality constraints, specified
as a real matrix
b=[]; % Linear inequality constraints, specified
as a real vector
beq=[36; 29; 23; 42; 55; 46; 37; 53; 49];
% Linear equality constraints, specified as
a real vector
Aeq=[
1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1;
1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0;
0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0;
0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0;
0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1];
lb=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];
% Lower bounds, specified as a real vector or
real array
ub=[]; % Upper bounds, specified as a real
vector or real array
[x, fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)
toc

```

APPENDIX B

Application of the GNU Octave

```

tic()
C = [423 858 1209 1450; 1715 2246 2764 938;
1092 376 494 1968; 765 1357 1968 463; 1104
1697 2308 117]; % A matrix containing
the objective function coefficients
(the transportation costs)
s = [36 29 23 42 55]'; % Supply
d = [46 37 53 49]'; % Demand
A = [
1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1;
1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0;
0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0;
0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0;
0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1]; % A
matrix containing the constraints coefficients
c = C'(:);
b = [s;d]; % A column array containing the
right-hand side value for each constraint in
the constraint matrix
lb = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
% An array containing the lower bound on each
of the variables

```

```

ub = []; % An array containing the upper
bound on each of the variables. If ub is not
supplied, the default upper bound is assumed to
be infinite
ctype = "UUUUULLLLL"; % An array of characters
containing the sense of each constraint in the
constraint matrix. Each element of the array may
be one of the following values: "U" <=; "S" =;
"L" >=
vartype = "CCCCCCCCCCCCCCCCCCCC"; % A column
array containing the types of the variables.
"C" - A continuous variable; "I" - An integer
variable
sense = 1; % If sense is equal 1, the problem
is a minimization; If sense is equal -1, the
problem is a maximization
[xopt,fopt] = glpk(c,A,b,lb,ub,ctype,vartype,1);
xopt = reshape(xopt,4,5)';
fopt % The optimum value of the objective
function
xopt % The value of the decision variables at
the optimum
toc
tic; toc

```

APPENDIX C

Application of the R

```

start_time <- Sys.time()
cost=c(432,858,1209,1450,1715,2246,2764,938,
1092,376,494,1968,765,1357,1968,463, 1104,1697,
2308,117)
cost_matrix <- matrix(cost,nrow = 5, ncol = 4,
byrow = TRUE) # Matrix of costs; ij-th element
is the cost of transporting one item from source
i to destination j
row.rhs <- c(36,29,23,42,55) # Vector of numeric
values for the right-hand sides of the row
constraints
col.rhs <- c(46,37,53,49) # Vector of numeric
values for the right-hand sides of the column
constraints
row.signs <- c("=", "=", "=", "=", "=") # Vector of
character strings giving the direction of the
row constraints
col.signs <- c("=", "=", "=", "=") # Vector of
character strings giving the direction of the
column constraints
sol <-
lp.transport(cost_matrix, direction="min",
row.signs, row.rhs, col.signs, col.rhs)
sol
sol$solution # The optimal solution
sol$objval # The objective function
end_time <- Sys.time()
end_time - start_time

```

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the Military University of Technology (grant number 835/2023).

REFERENCES

- [1] T. Can and H. Koçak, "Tuncay Can's Approximation Method to obtain initial basic feasible solution to transport problem," *Appl. Comput. Math.*, vol. 5, no. 2, pp. 78–82, 2016, doi: [10.11648/j.acm.20160502.17](https://doi.org/10.11648/j.acm.20160502.17).
- [2] G. Kovács, "Novel supply chain concepts and optimization of virtual enterprises to reduce cost, increase productivity and boost competitiveness," *Bull. Pol. Acad. Sci. Tech. Sci.*, vol. 66, no. 6, pp. 973–980, 2018, doi: [10.24425/bpas.2018.125945](https://doi.org/10.24425/bpas.2018.125945).
- [3] Z. Banaszak, W. Muszyński, and G. Bocewicz, "Models of multimodal networks and transport processes," *Bull. Pol. Acad. Sci. Tech. Sci.*, vol. 63, no. 3, pp. 635–650, 2015, doi: [10.1515/bpasts-2015-0075](https://doi.org/10.1515/bpasts-2015-0075).
- [4] M. Tamannaee and M. Rasti-Barzoki, "Mathematical programming and solution approaches for minimizing tardiness and transportation costs in the supply chain scheduling problem," *Comput. Ind. Eng.*, vol. 127, pp. 643–656, 2019, doi: [10.1016/j.cie.2018.11.003](https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.11.003).
- [5] J. Ziolkowski, M. Oszczypała, J. Małachowski, and J. Szkutnik-Rogoż, "Use of Artificial Neural Networks to Predict Fuel Consumption on the Basis of Technical Parameters of Vehicles," *Energies*, vol. 14, no. 9, p. 2639, 2021, doi: [10.3390/en14092639](https://doi.org/10.3390/en14092639).
- [6] J. Ziolkowski, A. Łęgas, E. Szymczyk, J. Małachowski, M. Oszczypała, and J. Szkutnik-Rogoż, "Optimization of the Delivery Time within the Distribution Network. Taking into Account Fuel Consumption and the Level of Carbon Dioxide Emissions into the Atmosphere," *Energies*, vol. 15, no. 14, p. 5198, 2022, doi: [10.3390/en15145198](https://doi.org/10.3390/en15145198).
- [7] J. An, A. Mikhaylov, and S.-U. Jung, "A Linear Programming approach for robust network revenue management in the airline industry," *J. Air Transp. Manag.*, vol. 91, p. 101979, 2021, doi: [10.1016/j.jairtraman.2020.101979](https://doi.org/10.1016/j.jairtraman.2020.101979).
- [8] M. Izdebski, I. Jacyna-Gołda, P. Gołębiowski, and J. Plandor, "The optimization tool supporting supply chain management in the multi-criteria approach," *Arch. Civ. Eng.*, vol. 66, no. 3, pp. 505–524, 2020, doi: [10.24425/ACE.2020.134410](https://doi.org/10.24425/ACE.2020.134410).
- [9] K. Tabaka, "The Practices of Transportation Organization in Metropolitan Areas. The Grenoble Example," *Studia KPZK*, vol. 174, pp. 1–10, 2017, doi: [10.24425/118546](https://doi.org/10.24425/118546).
- [10] A. Brzeziński, K. Brzeziński, T. Dybicz, and Ł. Szymański, "The Application of a Logistic Regression Model for Predicting Preferences of Transport System Users," *Arch. Civ. Eng.*, vol. 64, no. 4, pp. 145–159, 2018, doi: [10.2478/ace-2018-0049](https://doi.org/10.2478/ace-2018-0049).
- [11] G. Padma Karthiyayini, S. Ananthalakshmi, and R. Usha Parameswari, "An innovative method to solve transportation problem based on a statistical tool," *Adv. Math. Sci. J.*, vol. 9, no. 5, pp. 2533–2539, 2020, doi: [10.37418/amsj.9.5.16](https://doi.org/10.37418/amsj.9.5.16).
- [12] H.A. Hussein and M.A.K. Shiker, "A Modification to Vogel's Approximation Method to Solve Transportation Problems," *J. Phys.-Conf. Ser.*, 2020, vol. 1591, pp. 1–12, doi: [10.1088/1742-6596/1591/1/012029](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1591/1/012029).
- [13] K. Karagul and Y. Sahin, "A novel approximation method to obtain initial basic feasible solution of transportation problem," *J. King Saud Univ.-Eng. Sci.*, vol. 32, no. 3, pp. 211–218, 2020, doi: [10.1016/j.jksues.2019.03.003](https://doi.org/10.1016/j.jksues.2019.03.003).
- [14] E. Angelelli, V. Morandi, M. Savelsbergh, and M.G. Speranza, "System optimal routing of traffic flows with user constraints using linear programming," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 293, no. 3, pp. 863–879, 2021, doi: [10.1016/j.ejor.2020.12.043](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.12.043).
- [15] S. Mancini and M. Gansterer, "Vehicle routing with private and shared delivery locations," *Comput. Oper. Res.*, vol. 133, pp. 1–12, 2021, doi: [10.1016/j.cor.2021.105361](https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105361).
- [16] M. Salehi, M. Jalalian, and M.M. Vali Siar, "Green transportation scheduling with speed control: trade-off between total transportation cost and carbon emission," *Comput. Ind. Eng.*, vol. 113, pp. 392–404, 2017, doi: [10.1016/j.cie.2017.09.020](https://doi.org/10.1016/j.cie.2017.09.020).
- [17] A. Mhlanga, I.S. Nduna, D.F. Matarise, and A. Machisvo, "Innovative application of Dantzig's North – West Corner Rule to solve a transportation problem," *Int. J. Educ. Res.*, vol. 2, no. 2, pp. 1–12, 2014.
- [18] M. Venkatachalapathy, R. Pandiarajan, and S. Ganeshkumar, "A special type of solving transportation problems using generalized quadratic fuzzy number," *Int. J. Sci. Technol. Res.*, vol. 9, no. 2, pp. 6344–6348, 2020.
- [19] Ö. Kirca and A. Şatir, "A heuristic for obtaining an initial solution for the transportation problem," *J. Oper. Res. Soc.*, vol. 41, no. 9, pp. 865–871, 1990, doi: [10.1057/jors.1990.124](https://doi.org/10.1057/jors.1990.124).
- [20] M. Mathirajan and B. Meenakshi, "Experimental analysis of some variants of Vogel's approximation method," *Asia-Pac. J. Oper. Res.*, vol. 21, no. 4, pp. 447–462, 2004, doi: [10.1142/S0217595904000333](https://doi.org/10.1142/S0217595904000333).
- [21] Z.A.M.S. Juman and M.A. Hoque, "An efficient heuristic to obtain a better initial feasible solution to the transportation problem," *Appl. Soft Comput. J.*, vol. 34, pp. 813–826, 2015, doi: [10.1016/j.asoc.2015.05.009](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.05.009).
- [22] T. Imam, G. Elsharawy, M. Gomah, and I. Samy, "Solving transportation problem using object-oriented model," *Int. J. Comput. Sci. Netw. Secur.*, vol. 9, no. 2, pp. 353–361, 2009.
- [23] O. Adeoye Akeem, E.M. Igbinehi, B. Babalola John, and K.S. Emiola Olawale, "Programming Development on Transportation Problem using C++ and Stepping Stone for Evaluation," *Int. J. Adv. Res. Comput. Sci.*, vol. 6, no. 1, pp. 177–184, 2015.
- [24] P.L. Pallavi and R.A. Lakshmi, "A Mat Lab oriented approach to solve the transportation problem," *Int. J. Adv. Res. Found.*, vol. 2, no. 11, pp. 1–4, 2015.
- [25] J.K. Appati, G.K. Gogovi, and G.O. Fosu, "MATLAB implementation of Vogel's approximation and the modified distribution methods," *Int. J. Adv. Comput. Technol.*, vol. 4, no. 1, pp. 1449–1453, 2015.
- [26] P. Ghadle Kirtiwant and M. Muley Yogesh, "New approach to solve assignment problem using MATLAB," *Int. J. Latest Technol. Eng. Manag. Appl. Sci.*, vol. 4, no. 1, pp. 36–39, 2015.
- [27] D.J. Sengamalaselvi, "Solving transportation problem by using MATLAB," *Int. J. Eng. Sci. Res. Technol.*, vol. 6, no. 1, pp. 374–381, 2017.
- [28] B. Zhang, "The Optimization of Distribution Path of Fresh Cold Chain Logistics Based on Genetic Algorithm," *Comput. Intell. Neurosci.*, vol. 2022, pp. 1–10, 2022, doi: [10.1155/2022/4667010](https://doi.org/10.1155/2022/4667010).
- [29] L. Cui, Y. Liu, and Z. Liu, "Research on mathematical modeling of order and transshipment optimal distribution," in *5th International Symposium on Big Data and Applied Statistics, ISB-DAS 2022*, 2022, vol. 2294, no. 1, pp. 1–7, doi: [10.1088/1742-6596/2294/1/012036](https://doi.org/10.1088/1742-6596/2294/1/012036).
- [30] H. Liu, P. Zhan, and M. Zhou, "Optimization of a Logistics Transportation Network Based on a Genetic Algorithm," *Mobile Inf. Syst.*, vol. 2022, pp. 1–8, 2022, doi: [10.1155/2022/1271488](https://doi.org/10.1155/2022/1271488).
- [31] S. Nagar, *Introduction to Octave: For Engineers and Scientists*. New York, USA: Apress, 2018, doi: [10.1007/978-1-4842-3201-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4842-3201-9).

- [32] J. Szkutnik-Rogoż, J. Ziółkowski, J. Małachowski, and M. Oszczypta, "Mathematical programming and solution approaches for transportation optimisation in supply network," *Energies*, vol. 14, no. 21, p. 7010, 2021, doi: [10.3390/en14217010](https://doi.org/10.3390/en14217010).
- [33] M. Krynke, K. Mielczarek, and O. Kiriliuk, "Cost Optimization and Risk Minimization during Teamwork Organization," *Manag. Syst. Prod. Eng.* vol. 29, no. 2, pp. 145–150, 2021, doi: [10.2478/mspe-2021-0019](https://doi.org/10.2478/mspe-2021-0019).
- [34] M. Krynke and K. Mielczarek, "Applications of linear programming to optimize the cost-benefit criterion in production processes," in *12th International Conference Quality Production Improvement, QPI 2018*, 2018, vol. 183, pp. 1–6, doi: [10.1051/mateconf/201818304004](https://doi.org/10.1051/mateconf/201818304004).
- [35] G. Baskaran, A. Bargiela, and R. Qu, "Simulation of scheduling and cost effectiveness of nurses using domain transformation method," in *28th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2014*, 2014, pp. 226–234, doi: [10.7148/2014-0226](https://doi.org/10.7148/2014-0226).
- [36] S.-C. Georgescu, "HBMOA applied to design a water distribution network for a town of 50000 inhabitants," *Univ. Politeh. Buchar. Sci. Bull. Ser. D-Mech. Eng.*, vol. 74, no. 1, pp. 91–102, 2012.
- [37] W. Song, "Building Construction Design Based on Particle Swarm Optimization Algorithm," *J. Control Sci. Eng.*, vol. 2022, pp. 1–8, 2022, doi: [10.1155/2022/7139230](https://doi.org/10.1155/2022/7139230).
- [38] H. Kotthaus, I. Korb, M. Engel, and P. Marwedel, "Dynamic page sharing optimization for the R language," *ACM SIGPLAN Notices*, vol. 50, no. 2, pp. 79–90, 2015, doi: [10.1145/2661088.2661094](https://doi.org/10.1145/2661088.2661094).
- [39] S.T. Mueller, B.S. Perelman, and E.S. Veinott, "An optimization approach for mapping and measuring the divergence and correspondence between paths," *Behav. Res. Methods*, vol. 48, no. 1, pp. 53–71, 2016, doi: [10.3758/s13428-015-0562-7](https://doi.org/10.3758/s13428-015-0562-7).
- [40] J. Nash, "On best practice optimization methods in R," *J. Stat. Softw.*, vol. 60, no. 2, pp. 1–14, doi: [10.18637/jss.v060.i02](https://doi.org/10.18637/jss.v060.i02).
- [41] T.-Y. Li, X.-N. Lyu, F. Li, and Y. Chen, "Routing optimization model and algorithm for takeout distribution with multiple fuzzy variables under dynamics demand," *Control Decis.*, vol. 34, no. 2, pp. 406–413, 2019, doi: [10.13195/j.kzyjc.2017.1105](https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2017.1105).
- [42] S. Hore, A. Chatterjee, and A. Dewanji, "Improving variable neighborhood search to solve the traveling salesman problem," *Appl. Soft Comput. J.*, vol. 68, pp. 83–91, 2018, doi: [10.1016/j.asoc.2018.03.048](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.03.048).
- [43] A.G. Dos Passos and M.A. Luersen, "Multi-objective optimization with kriging surrogates using 'moko', an open source package," *Lat. Am. J. Solids Struct.*, vol. 15, no. 10, pp. 1–17, 2018, doi: [10.1590/1679-78254324](https://doi.org/10.1590/1679-78254324).
- [44] R.R. Lekan, L.C. Kavi, and N.A. Neudauer, "Maximum Difference Extreme Difference Method for Finding the Initial Basic Feasible Solution of Transportation Problems," *Appl. Appl. Math.-Int. J.*, vol. 16, no. 1, pp. 345–360, 2021.